Teoría de Circuitos - Práctico 6

Transformada de Laplace

1^{er} semestre 2022

Ejercicios obligatorios: 3 (30 %), 4 (30 %), 6c) (20 %) y 8 (20 %).
Ejercicios opcionales: 1 (+5 %/parte), 2 (+5 %/parte), 5 (+5 %/parte), 6a) y 6b) (+15 %) y 9 (+50 %).
Fecha de entrega tentativa: **21 de junio a las 23:59**.

Ejercicio 1.

Demostrar las siguientes propiedades de Laplace

a) Linealidad.

b) Traslación frecuencial.

c) Transformada de una función periódica.

d) Transformada de la derivada temporal.

e) Teorema del valor final.

Ejercicio 2.

Hallar la transformada de Laplace de:
(a) $Y(n)$, (b) $Y(t).t^n, n \in \mathbb{N}$, (c) $Y(t).t^n e^{-at}$, (d) $Y(t)e^{-t/\tau}, \tau \in \mathbb{R}^+$,
(e) $Y(t).\frac{1-e^{-at}}{a}$, (f) $Y(t)sen(\omega t)$, (g) $Y(t)cos(\omega t)$, (h) $Y(t).e^{-at}.\sin(\omega_0 t)$, (i) $Y(t).t^n.e^{-at}.\sin(\omega_0 t)$

Ejercicio 3.

Para cada una se las señales indicadas, calcular su transformada de Laplace

a) Pulso rectangular de ancho T, $Y(t) - Y(t-T)$.

b) Triángulo de la figura 3.1,

c) Trapecio de la figura 3.1.

d) $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, si $t \in \left[0, \frac{\pi}{\omega_0}\right)$, $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo.

e) Diente de sierra de periodo T (triángulo repetido).

f) Seno rectificado de periodo $\frac{\pi}{\omega_0}$ (señal de la parte d) repetida).

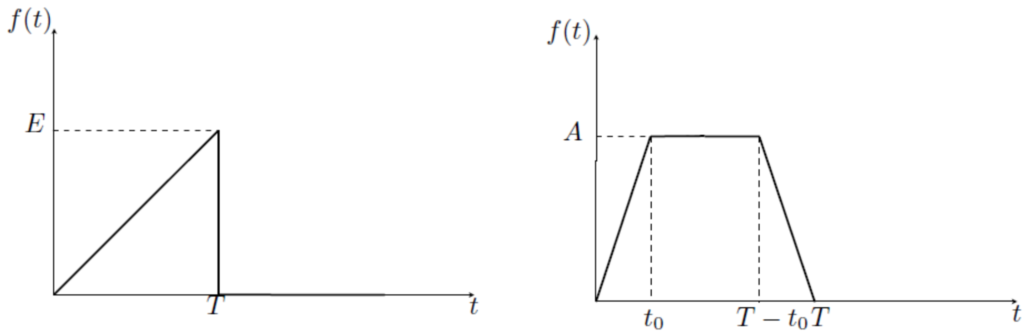


Figura 3.1: Señales del ejercicio Ejercicio 3

Ejercicio 4.

a) Hallar la anti-transformada de Laplace para las siguientes funciones de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- $F_1(s) = \frac{1}{s+a}$, $a \in \mathbb{C}$
- $F_2(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
- $F_3(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\left(1 + e^{-\frac{T}{2}s}\right)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T \in \mathbb{R}^+$
- $F_4(s) = \frac{1}{s^2\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$, $T \in \mathbb{R}^+$

b) Aplicar teorema de valor inicial y final en los casos que sea posible. Justificar en caso de no poder usarlo.

Ejercicio 5.

I. Calcular $f(t)$, siendo $F(s)$ su transformada de Laplace:
(i) $\frac{s+2}{2(s^2-1)}$, (ii) $\frac{3s+1}{5s^3(s-2)^2}$, (iii) $\frac{1-e^{-4s}}{s^2(3s+2)}$, (iv) $\frac{1}{s^3}$, (v) $\frac{s+1}{s(s^2+4)}$, (vi) $\frac{s}{(s+\omega_1^2)(s+\omega_2^2)}$
(vii) $\frac{(1-e^{-\pi s})^2}{(s(s^2+4))}$ (graficarla)
(viii) $\frac{1}{s(s^2+1)}$ (sin hacer cuentas, usando propiedades y asumiendo conocida la transformada del $\sin(t)$)

II. ¿En qué casos es posible aplicar el teorema del valor final? En los que se pueda, aplíquelo.

Ejercicio 6.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando la transformada de Laplace:

a) $x(t) + 5\dot{x}(t) + 4\ddot{x}(t) = 1$, con $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 1$, $t \geq 0$.

b) $\int_0^t x(\tau)d\tau + 5x(t) + 4\dot{x}(t) = 1$, con $x(0) = 3$, $t \geq 0$.

c) $\dot{x}(t) + a.x(t) = u(t)$, con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, para los siguientes casos de $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

   i) $u(t) = 0$.
   ii) $u(t) = Y(t)$.
   iii) $u(t) = Y(t).e^{a_0 t}$.
   iv) $u(t) = Y(t).\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$.

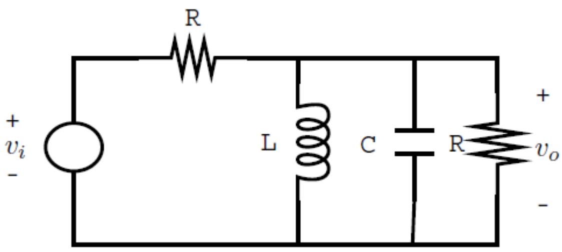
Ejercicio 7.

Se consideran las siguientes componentes interconectadas, siendo $v(t)$ e $i(t)$ las tensiones y corrientes en bornes, medidas de acuerdo a la ley de Ohm. Calcular las relaciones $\frac{V(s)}{I(s)}$ para cada caso, asumiendo condiciones iniciales nulas:
(a) resistencia R , (b) inductancia L , (c) condensador C , (d) serie de R y L , (e) paralelo de R y C.

Ejercicio 8.

Hallar las funciones generalizadas $f(t)$ cuyas transformadas de Laplace son:
(a) $\left(\frac{s}{s+1}\right)^2$, (b) $\left(\frac{1-e^{as}}{s}\right)^2$, (c) $\frac{1}{1+e^{-Ts}}$

Ejercicio 9.



a) Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$.

b) Hallar la función de transferencia del circuito $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, para condiciones iniciales nulas.

c) Determinar un conjunto de parámetros de forma que la transferencia tenga polos complejos conjugados con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 2$.

d) Bosquejar la respuesta temporal al escalón, calculando primero su transformada de Laplace.

e) Obtenga los valores iniciales y finales de $v_i(t)$, aplicando los teoremas respectivos a $V_o(s)$.