Transformada de Laplace

Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020

Introducción

- Hasta ahora sabemos resolver un circuito resistivo, aplicando métodos sistemáticos.
- También aprendimos a resolver circuitos en régimen sinusoidal, asumiendo que existe dicho régimen, y despreciando los transitorios que nos llevan a él.
- En régimen sinusoidal, aplicando fasores, obtenemos un circuito equivalente que nos permite generalizar lo sabido para circuitos resistivos, con la noción de impedancia.
- La transferencia en régimen sinusoidal, que relaciona la entrada y la salida en régimen, puede ser estudiada mediante los diagramas de Bode, y nos dice cómo el circuito procesa distintas componentes de frecuencia.
- Combinado con la serie de Fourier y la transformada de Fourier, lo anterior nos va a permitir analizar cómo se procesa en régimen una señal cualquiera a través de un circuito lineal (esto no lo veremos en este curso).

Introducción

- Hasta el momento no hemos contemplado los transitorios (cómo llegamos al régimen).
- Veremos una nueva herramienta que nos permite estudiar los transitorios, e incluso circuitos lineales a tramos: la Transformada de Laplace.
- Está muy relacionada con la transformada de Fourier y permite obtener un vínculo entre la respuesta en el tiempo y el comportamiento en frecuencia.

Transformada de Laplace

Definición

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformada unilateral de Laplace

Variantes

- Luego haremos algún ajuste a la definición anterior para contemplar la resolución de circuitos con condiciones iniciales no nulas.
- Una definición más general integra desde $-\infty$ a $+\infty$ (transformada bilateral).

Transformada de Laplace

Condiciones de existencia de la transformada unilateral de Laplace

Por el contexto en el que la vamos a usar, vamos a considerar esta condición suficiente para la existencia de la integral impropia:

$$\exists M > 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \;/\; |f(t)| \leq Me^{\alpha t} \;\;, \forall t \geq 0$$

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|.|e^{-st}|dt \leq \int_0^{+\infty} M.e^{\alpha t}.e^{-re(s)t}dt \leq$$

$$\int_0^{+\infty} M.e^{-[re(s)-\alpha]t}dt < \infty \quad , \quad \text{si } re(s) > \alpha$$

Transformada de Laplace

Semiplano de convergencia

- La integral impropia depende del parámetro s complejo.
- Se tiene la siguiente propiedad (que no demostramos):
  - Si existe $F(s_0)$, entonces existe $F(s)$ para todo número complejo s tal que

$$re(s) \geq re(s_0) \qquad \text{(semiplano derecho de convergencia)}$$

- Se define la abscisa de convergencia como aquella que define el mayor semiplano derecho de convergencia (es el *ínfimo* de los $re(s_0)$ anteriores).
- Esta idea es importante para cuestiones de antitransformación (volver de la s a la t) y para análisis de estabilidad de circuitos lineales.

Transformada de Laplace

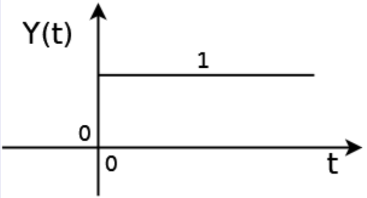
Consideraciones sobre la convergencia

- La convergencia implica la existencia de $\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}dt$.
- Se da en un semiplano derecho.
- Bajo la hipótesis de comportamiento exponencial al infinito, si tenemos convergencia para $s = s_0$, entonces
  - tenemos convergencia absoluta $\forall re(s) > re(s_0)$.
  - tenemos convergencia uniforme $\forall re(s) \geq re(s_0) + \varepsilon$.

Comentarios

- Sólo importa la función desde 0 en adelante.
- Usualmente escribimos $Y(t).f(t)$, donde $Y(t)$ representa el escalón de Heaviside:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



- Dos funciones casi idénticas, que difieran en un *conjunto de medida nula*, tienen la misma transformada.

Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right](s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\lambda . f(t)\right](s) = \lambda . F(s)$$

Traslación temporal

$$\mathcal{L}\left[Y(t-T).f(t-T)\right](s) = F(s)e^{-Ts}$$

Traslación *en frecuencia*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}.f(t)\right](s) = F(s+a)$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: $f(t) = Y(t).e^{-at}$, $a \in \mathbb{C}$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$\Rightarrow F(s) = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^{+\infty} = -\frac{\lim_{t\to+\infty} e^{-(s+a)t} - 1}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

si $re(s+a) > 0$ (ó $re(s) > -re(a)$)$\Rightarrow$ Abscisa de convergencia: $-re(a)$.

- Si $re(a) > 0$, la región de convergencia incluye el eje imaginario.
- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-a$ es la abscisa de convergencia de $F(s)$.

Transformada de Laplace

Ejemplo: $f(t) = Y(t).e^{-at}$, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}$

- $a = j\omega_0$, $F(s) = \frac{1}{s+j\omega_0}$.
- Entonces

$$G(s) = \mathcal{L}\left[Y(t).\operatorname{sen}(\omega_0 t)\right](s) = \mathcal{L}\left[Y(t).\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right](s)$$

$$G(s) = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left[e^{j\omega_0 t}\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega_0 t}\right](s)\right)$$

$$G(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right)$$

$$G(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{s + j\omega_0 - s + j\omega_0}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}\right)$$

$$G(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega_0}{s^2 - (j\omega_0)^2}\right) \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}}$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: $f(t) = Y(t).e^{-at}$, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}$

- $a = j\omega_0$, $F(s) = \frac{1}{s+j\omega_0}$.
- De igual manera,

$$G(s) = \mathcal{L}\left[Y(t).\cos(\omega_0 t)\right](s) = \mathcal{L}\left[Y(t).\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right](s)$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}}$$

- Tanto el seno como el coseno tienen abscisa de convergencia nula!!

Ejemplo: $f(t) = Y(t).e^{-at}$, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}$

- Consideremos ahora

$$f(t) = Y(t).e^{-\alpha t}.\cos(\omega_0 t) = Y(t).e^{-\alpha t}.\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$

Observemos que

$$f(t) = Y(t).\left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega_0)t} + e^{-(\alpha-j\omega_0)t}}{2}\right] = Y(t).\left[\frac{e^{-at} + e^{-\bar{a}t}}{2}\right]$$

con $a = \alpha + j\omega_0$. Entonces

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+\bar{a}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(2s + (a+\bar{a}))}{(s+a)(s+\bar{a})}\right] = \frac{s + re(a)}{(s+a)(s+\bar{a})}$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: $f(t) = Y(t).e^{-\alpha t}.\cos(\omega_0 t)$, $a = \alpha + j\omega_0$

$$F(s) = \frac{s + re(a)}{(s+a)(s+\bar{a})} = \frac{s + re(a)}{s^2 + 2re(a)s + |a|^2}$$

$$F(s) = \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = |a| = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \quad , \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\boxed{Y(t).e^{-\zeta\omega_n t}.\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \Leftrightarrow \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Ejemplo: $f(t) = Y(t)$

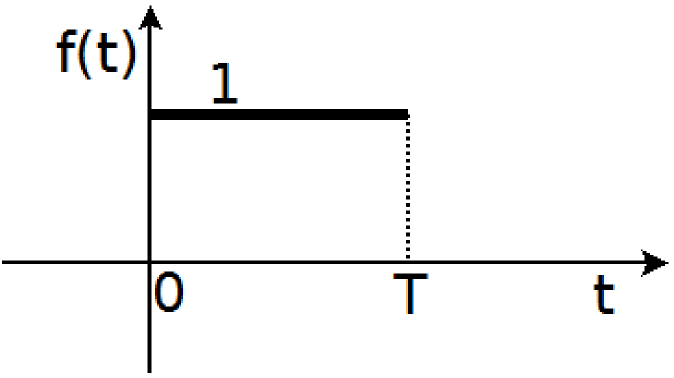
Corresponde al caso $a = 0$.

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

La abscisa de convergencia es nula.

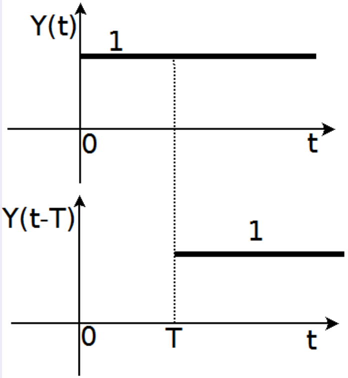
Transformada de Laplace

Ejemplo: pulso de ancho T



Transformada de Laplace

Ejemplo: pulso de ancho T



$$f(t) = Y(t) - Y(t-T) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: señal periódica de periodo T

- Sea $f(t)$ una señal periódica, de periodo T, y transformable.
- El cálculo directo nos dice que

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt$$

- Haciendo el cambio de variable $x = t - nT$ y usando la periodicidad, obtenemos

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{T} f(x+nT)e^{-s(x+nT)}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} \int_0^{T} f(x)e^{-sx}dx$$

- La integral no depende de n!!!

Transformada de Laplace

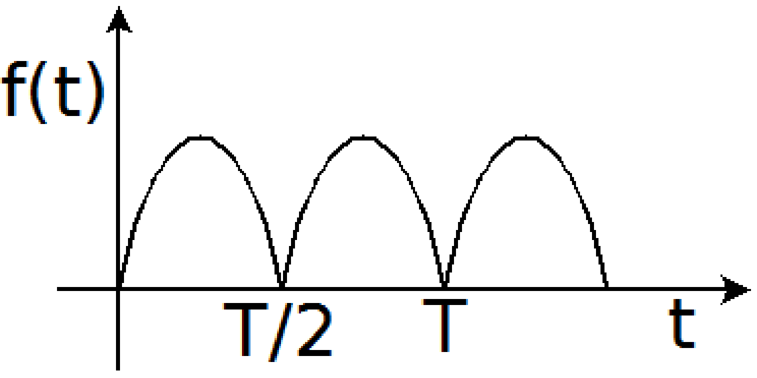
Ejemplo: señal periódica de periodo T

$$F(s) = \left(\int_0^T f(x) e^{-sx} dx \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-sT} \right)^n = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

- Debe ser $|e^{-sT}| < 1$, ó $re(s) > 0$ (la abscisa de convergencia es nula.).
- Para hallar $F(s)$, alcanza con hallar $F_1(s)$, la transformada de Laplace de la función mirada en un periodo, y luego dividirla por la expresión $1 - e^{-sT}$.
- Observemos que $1 - e^{-sT} = 0 \Leftrightarrow sT = jk2\pi$, con k entero.
- Entonces $F(s)$ tiene infinitas singularidades (polos), de la forma

$$s = \frac{j2k\pi}{T} = jk\omega_0 \quad \text{(frecuencias armónicas de } \omega_0\text{)}$$

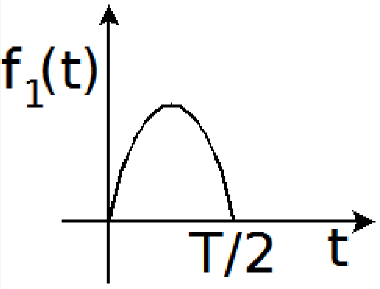
Ejemplo: seno rectificado de onda completa



- Tenemos que transformar la función en un periodo ($f_1(t)$).

Transformada de Laplace

Ejemplo: seno rectificado de onda completa

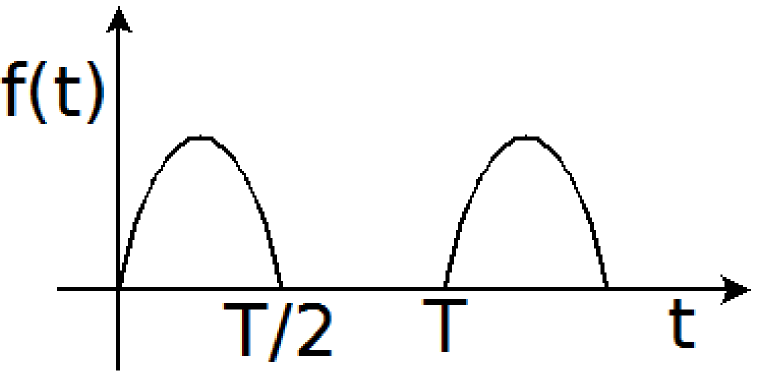


Observemos que $f_1(t) = Y(t).\operatorname{sen}(\omega_0 t) + Y\left(t - \frac{T}{2}\right)\operatorname{sen}\left[\omega_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$, con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Entonces

$$F_1(s) = \frac{\omega_0\left(1 + e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-s\frac{T}{2}}} = \frac{\omega_0\left(1 + e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{(s^2 + \omega_0^2)\left(1 - e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$$

Transformada de Laplace

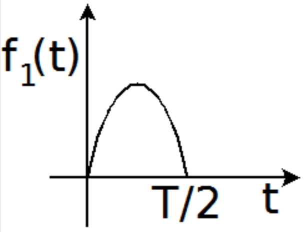
Ejemplo: seno rectificado de media onda



- Tenemos que transformar la función en un periodo ($f_1(t)$).

Transformada de Laplace

Ejemplo: seno rectificado de media onda



Sabemos que

$$F_1(s) = \frac{\omega_0 \left(1 + e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{s^2 + \omega_0^2}$$

Entonces

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{\omega_0 \left(1 + e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{(s^2 + \omega_0^2)\,(1 - e^{-sT})} = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)\left(1 - e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Derivada temporal

Consideremos una función f derivable y transformable

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) = sF(s) - f(0^+)$$

$f(0^+)$ representa las condiciones iniciales.

Demostración

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \underbrace{=}_{partes} f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t\to 0^+} f(t)e^{-st}}_{-f(0^+)} + sF(s) = sF(s) - f(0^+)$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Integración

Sea $f(t)$ transformable y definamos

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx \Rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Demostración

- Sabemos que $g(0) = 0$ y que $g'(t) = f(t)$.
- Aplicando el resultado anterior

$$F(s) = sG(s) \Rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Derivada en s

Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, con $t.f(t)$ transformable. Entonces

$$\mathcal{L}\left[t.f(t)\right](s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Demostración

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \underbrace{=}_{convergencia\, uniforme} \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}\left[t.f(t)\right](s)$$

Transformada de Laplace

Más ejemplos

$$\mathcal{L}\left[Y(t).t\right](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[Y(t)\right](s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left[Y(t).t.e^{-at}\right](s) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[Y(t).\frac{t^n}{n!}\right](s) = \cdots$$

Teorema del valor inicial

Enunciado

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)$$

- La igualdad asume que el límite existe.
- El límite se toma usualmente sobre el eje real positivo, dentro del semiplano de convergencia.

Demostración

De la identidad

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) = sF(s) - f(0^+) \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0^+)$$

Pero

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \underbrace{=}_{\text{conv. unif.}} \int_0^{+\infty} f'(t) \lim_{s\to\infty} e^{-st}dt = 0$$

Teorema del valor inicial

Ejemplo

$$F(s) = \frac{35s^2 + 57s + 10}{7s^3 + 85s + 13s + 1} \Rightarrow \lim_{s\to\infty} sF(s) \approx \lim_{s\to\infty} \frac{35s^3}{7s^3} = 5$$

- No conocemos la expresión temporal de la señal (por ejemplo, es la transformada de Laplace de la respuesta de un sistema).
- Sabemos *desde dónde arranca*, mirando la transformada.

Teorema del valor final

$$\boxed{\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to +\infty} f(t)}$$

- El resultado requiere que la abscisa de convergencia sea negativa, así el origen está dentro del semiplano de convergencia.
- No puede haber singularidades de $F(s)$ en el eje imaginario ni a la derecha del mismo.
- Se puede extender al caso en que hay una sigularidad simple de $F(s)$ en $s = 0$ (como por ejemplo, el escalón). Acá la abscisa de convergencia es 0!!

Demostración

De la identidad $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^+)$ obtenemos

$$\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0^+) = \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} \overbrace{=}^{\text{conv. unif.}} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-0.t}dt$$

$$= \lim_{t\to +\infty} f(t) - f(0^+)$$

Teorema del valor final

Ejemplo

Consideremos nuevamente $F(s) = \frac{35s^2+57s+10}{7s^3+85s^2+13s+1}$.

- No es inmediato, pero puede afirmarse que todas las raíces del denominador están en el semiplano izquierdo, con parte real negativa.
- Podemos aplicar el Teorema del valor final.
- $\lim_{s\to 0} sF(s) = 0$

Ejemplo

Consideremos $F(s) = \frac{A\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$, $\zeta > 0$.

- El denominador tiene una raíz nula, simple, y dos raíces complejas conjugadas en el semiplano izquierdo.
- Podemos aplicar el Teorema del valor final.
- $\lim_{s\to 0} sF(s) = A$

Teorema del valor final

Ejercicio

Intentar aplicar el Teorema del valor final a la transformada de Laplace del coseno:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Resolución de ecuaciones diferenciales mediante Laplace

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \ldots + a_1\frac{d}{dt}x(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

  con condiciones iniciales nulas (luego veremos cómo afectan las mismas).
- Usaremos la notación compacta

$$Dx(t) = u(t) \quad , \quad D = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} \text{ (operador diferencial lineal)}$$

  ($a_n = 1$).

Resolución de ecuaciones diferenciales mediante Laplace

Apliquemos la transformada de Laplace

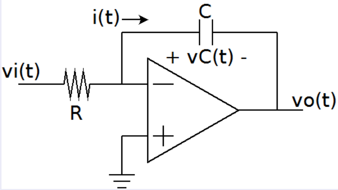
- $$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] + a_{n-1}\mathcal{L}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t)\right] + \ldots + a_1\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] + a_0\mathcal{L}\left[x(t)\right]$$
$$= \mathcal{L}\left[u(t)\right]$$

- Aplicando la propiedad de derivación temporal

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right] X(s) = U(s) \Rightarrow X(s) = \frac{U(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

- La ecuación diferencial se transformó en una ecuación algebraica.
- *Volviendo* al tiempo, hallamos $x(t)$.

Ejemplo



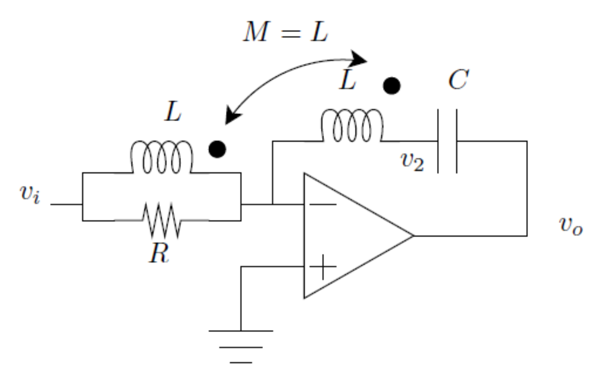
- Considerando el operacional ideal, las ecuaciones del circuito son

$$\frac{v_i(t)}{R} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad , \quad v_o(t) = -v_C(t)$$

- Pasando a Laplace (con condiciones iniciales nulas)

$$\frac{V_i(s)}{R} = -CsV_o(s) \Rightarrow V_o(s) = -\frac{1}{RCs}V_i(s) \quad \text{(integrador!!)}$$

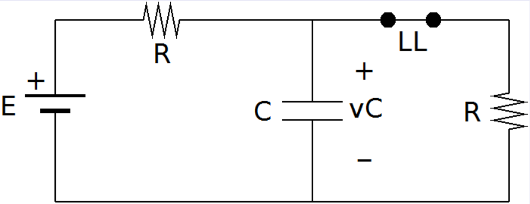
Ejemplo



$$V_o(s) = \left[-\frac{s^2 + \frac{s}{2RC} + \frac{1}{2LC}}{s^2} \right] V_i(s)$$

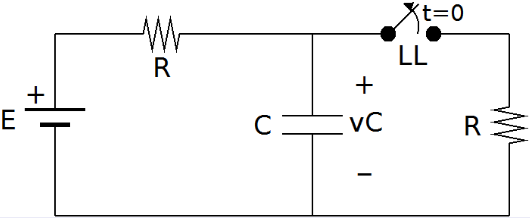
(condiciones iniciales nulas!!)

Ejemplo



- Consideremos el circuito de la figura, en régimen de continua, con la llave cerrada hace mucho tiempo.
- Como está en régimen de continua, podemos considerar al condensador como un circuito abierto.
- La tensión en bornes del condensador será: $v_C = \frac{E}{2} = v_{C0}$.
- Supongamos que en un cierto instante, que llamaremos $t = 0$, se abre la llave, cambiando la topología del circuito.
- Hallar v_C para todo tiempo positivo.

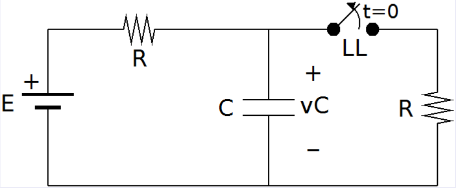
Ejemplo



- El circuito resultante es sencillo: un RC con carga inicial en el condensador.
- Resolvamos por Laplace, para ver cómo se usa.
- La ecuación diferencial del circuito es

$$\frac{E - v_C(t)}{R} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \underbrace{\Rightarrow}_{RC=\tau} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = \frac{1}{\tau}E$$

Ejemplo: $\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = \frac{1}{\tau}E,\ t \geq 0$

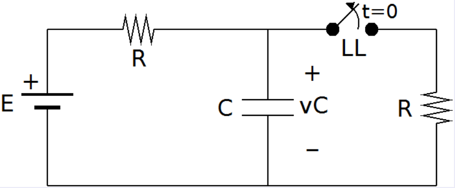


- Pasemos a Laplace.

$$sV_C(s) - v_C(0^+) + \frac{1}{\tau}V_C(s) = \frac{E}{\tau s}$$

- $v_C(0^+) = v_{C0}$, la tensión de régimen calculada antes, por la continuidad de la tensión en bornes del condensador.

Ejemplo: $\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = \frac{1}{\tau}E$, $t \geq 0$

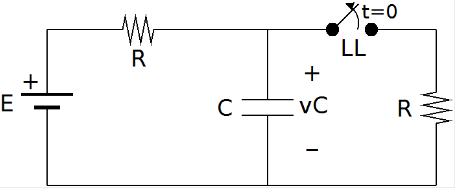


- Despejemos $V_C(s)$.

$$V_C(s)\left(s+\frac{1}{\tau}\right) = \frac{E}{\tau s} + v_{C0} \Rightarrow V_C(s) = \frac{\frac{E}{\tau s} + v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$V_C(s) = \frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

Ejemplo: $V_C(s) = \frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$



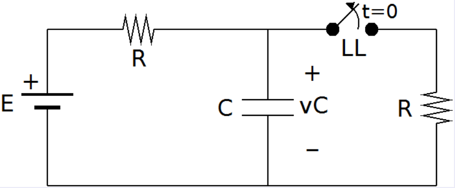
- Para *volver* al tiempo, escribimos $V_C(s)$ en función de transformadas conocidas:

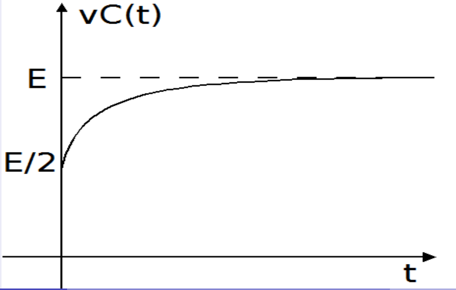
$$V_C(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$v_C(t) = Y(t).\left[E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_{C0}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$\text{ó} \quad v_C(t) = Y(t).\left[E + (v_{C0} - E)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

Ejemplo: $V_C(s) = \frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$





Ejemplo: $V_C(s) = \frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}$

Verifiquemos algunas cosas:

- Teorema del valor inicial

$$\lim_{s\to\infty} sV_C(s) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = v_{C0}$$

- Teorema del valor final
- Las singularidades presentes son 0 simple y $-\frac{1}{\tau}$. OK

$$\lim_{s\to 0} sV_C(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = E$$

Antitransformada de Laplace

Antitransformada o inversión de Laplace

- La herramienta *Transformada de Laplace* la usaremos así:
  - Partimos de los datos del circuito, expresados en el tiempo.
  - Pasamos al dominio de Laplace, donde las relaciones entre las entradas y las respuestas son algebraicas y podemos despejar.
  - Volvemos al tiempo, obteniendo la expresión temporal de las respuestas deseadas.
- La base matemática de la inversión de Laplace es la integración de funciones de variable compleja, que está fuera del alcance del curso.
- Veremos un método relativamente sencillo, que puede aplicarse en casi todas las situaciones que encontraremos al resolver circuitos.

Antitransformada de Laplace

Fracciones simples

- A esta altura ya sabemos antitransformar o ver en el tiempo un conjunto relativamente importante de funciones de s:

$$\frac{1}{s+a}\ ,\ \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\ ,\ \frac{1}{s}\ ,\ e^{-sT}F(s)$$

- La idea básica es escribir o *descomponer* $F(s)$ como suma de expresiones que sabemos antitransformar.
- Esto no abarca todas las posibles funciones que podamos llegar a enfrentar, pero sí cubre una clase muy amplia:

$$\text{las funciones real racionales} \Rightarrow F(s) = K\frac{N(s)}{D(s)}$$

siendo $N(s)$ y $D(s)$ polinomios con coeficientes reales, de grado m y n respectivamente.

Antitransformada de Laplace

Funciones real racionales

- Como ya sabemos,

$$F(s) = K\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = K\frac{\prod_{k=1}^{m}(s+z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

- Usarema la siguiente nomenclatura
  - z_k son los opuestos de los ceros de $F(s)$ (raíces del numerador).
  - p_i son los opuestos de los polos de $F(s)$ (raíces del denominador).
  - Estos nombres provienen de la teoría de funciones de variable compleja.
- La abscisa de convergencia de $F(s)$ está dada por la parte real del polo más a la derecha.
- ¿Podemos escribir $F(s)$ como suma de términos de la forma

$$\frac{B_i}{s+p_i}?$$

Antitransformada de Laplace

Fracciones simples

La respuesta es sí!!! en el caso en que:

- $m < n$ (función racional propia)
- Los polos son todos reales y distintos (raíces reales simples)

Antitransformada de Laplace

Ejemplo

$$F(s) = \frac{10s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{10s}{(s+2)(s+3)} = \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{s+3}$$

- ¿Cómo hallamos B_1 y B_2?
- Lo más directo es hacer común denominador e igualar coeficientes de potencias de s igual orden:

$$B_1(s+3) + B_2(s+2) = (B_1 + B_2)s + 3B_1 + 2B_2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} B_1 + B_2 & = & 10 \\ 3B_1 + 2B_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} B_1 & = & -20 \\ B_2 & = & 30 \end{array} \right.$$

Antitransformada de Laplace

Ejemplo

$$F(s) = \frac{10s}{s^2+5s+6} = \frac{10s}{(s+2)(s+3)} = \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{s+3}$$

- Otra forma de hallar B_1 y B_2.
- Observemos que

$$(s+2)F(s) = B_1 + \frac{(s+2)B_2}{(s+3)} \Rightarrow (s+2)F(s)|_{s=-2} = B_1$$

- Tapadita: para calcular el coeficiente que corresponde a una raíz, *la tapo* en la expresión original, y evalúo el resto en la raíz.
- Verificar que se recupera $B_1 = -20$ y $B_2 = 30$.

Antitransformada de Laplace

Ejemplo

$$F(s) = \frac{5}{(s+1)(s+7)(s-10)} = \frac{B_1}{(s+1)} + \frac{B_2}{(s+7)} + \frac{B_3}{(s-10)}$$

Aplicamos *tapadita* y obtenemos:

$$B_1 = -\frac{5}{66} \quad , \quad B_2 = \frac{5}{6 \times 17} \quad , \quad B_3 = \frac{5}{11 \times 17}$$

Antitransformada de Laplace

Caso de raíces complejas conjugadas

- En las funciones real racionales, los polos complejos vienen de a pares conjugados.
- Podemos usar tapadita para cada raíz compleja o considerarlas conjuntamente.
- Escribamos:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{As + B}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad |\zeta| < 1$$

Observemos que

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{sN_1(s)}{D_1(s)} + A$$

y

$$F(0) = \frac{N_1(0)}{D_1(0)} + \frac{B}{\omega_n^2}$$

Antitransformada de Laplace

Ejemplo

$$F(s) = \frac{15s^2 - 16s - 7}{(s+2)(s^2+6s+25)}$$

- El denominador tiene raíces complejas conjugadas y una raíz real.
- La descomposición será

$$F(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{As+B}{s^2+6s+25}$$

  (aplicamos *tapadita* para la raíz real)
- Calculemos entonces A y B.

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = 15 = 5 + A \Rightarrow A = 10$$

$$F(0) = -\frac{7}{50} = \frac{5}{2} + \frac{B}{25} \Rightarrow B = -66$$

Antitransformada de Laplace

Caso de raíces reales dobles

- Cuando hay raíces múltiples, la descomposición es un poco más trabajosa.
- Veamos este ejemplo:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+5)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+5)^2} + \frac{C}{s+5}$$

- A y B salen por *tapadita*:

$$A = \frac{1}{25} \quad , \quad B = \frac{4}{5}$$

- C se obtiene de varias maneras (ver textos). Por ejemplo, haciendo común denominador.

$$C = -\frac{1}{25}$$

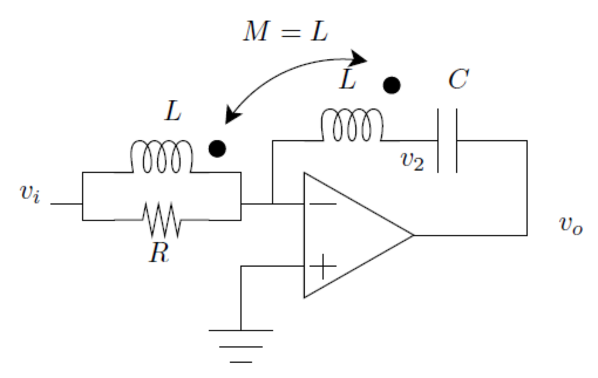
Antitransformada de Laplace

Caso de raíces reales múltiples

- Hay que hacer aparecer todas las potencias.
- El coeficiente de la potencia más alta sale por *tapadita*.
- Los otros coeficientes hay que trabajarlos más.
- Se sugiere leer los textos recomendados.

Antitransformada de Laplace

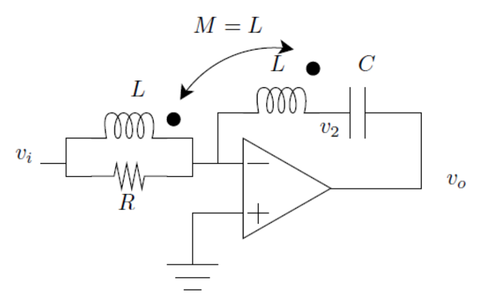
Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas



- Hallemos la relación $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.
- Hallemos la respuesta al escalón, si además $RC = \frac{1}{22\omega_0}$ y $LC = \frac{1}{20\omega_0^2}$.

Antitransformada de Laplace

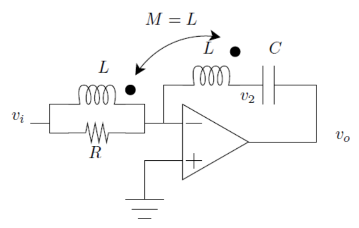
Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas



- Tomamos como tensión del primario la opuesta a la entrada $v_i(t)$ y como tensión del secundario $v_2(t)$, medida respecto de la tierra virtual.
- Observemos que el transformador es perfecto, con bobinas del primario y secundario idénticas ($L_1 = L_2 = M = L$), por lo que $v_1 = -v_i = v_2$.

Antitransformada de Laplace

Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas

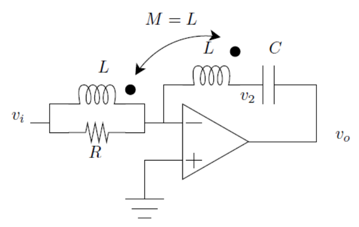


- La corriente que viene desde la fuente v_i se va toda por el secundario (operacional ideal):

$$-i_1(t) + \frac{v_i}{R} = -i_2(t) \Rightarrow \boxed{I_1(s) = I_2(s) + \frac{V_i(s)}{R}}$$

Antitransformada de Laplace

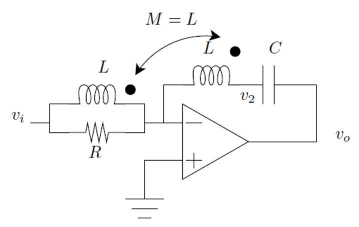
Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas



- La tensión del primario del transformador es
  $v_1(t) = -v_i(t) = L\frac{d}{dt}i_1(t) + L\frac{d}{dt}i_2(t)$,

$$-V_i(s) = Ls\left[I_1(s) + I_2(s)\right] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{sustituyendo } I_1} \boxed{I_2(s) = -\frac{R+Ls}{2RLs}V_i(s)}$$

Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas



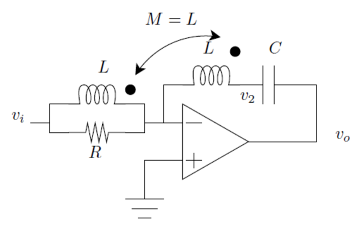
- Finalmente, tenemos la ecuación diferencial del condensador:

$$C\frac{d}{dt}\left[v_2(t) - v_o(t)\right] = -i_2(t)$$

- Pasando a Laplace: $Cs\left(V_2(s) - V_o(s)\right) = -I_2(s) \Rightarrow$
  $V_o(s) = V_2(s) + I_2(s) = -V_i(s) + I_2(s)$.

Antitransformada de Laplace

Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas

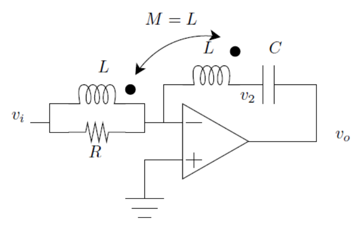


- Sustituyendo $I_2(s)$, obtenemos

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = -\frac{2RLCs^2 + Ls + R}{2RLCs^2} = -\frac{s^2 + \frac{1}{2RC}s + \frac{1}{2LC}}{s^2}$$

Antitransformada de Laplace

Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas



- Con los datos $RC = \frac{1}{22\omega_0}$ y $LC = \frac{1}{20\omega_0^2}$, la expresión se simplifica:

$$H(s) = -\frac{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}{s^2}$$

Antitransformada de Laplace

Resolución completa de un circuito, con condiciones iniciales nulas

- Para hallar la respuesta al escalón, tenemos que antitransformar

$$R(s) = \frac{1}{s}H(s) = -\frac{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}{s^3} = -\frac{1}{s} - \frac{11\omega_0}{s^2} - \frac{10\omega_0^2}{s^3}$$

- Ya está en fracciones simples!!
- Obtenemos

$$r(t) = -Y(t)\left[1 + 11\omega_0 t + \frac{10\omega_0^2}{2}t^2\right]$$

¡¡¡El operacional satura!!!

Convolución

Producto convolución

- El *producto convolución* de dos funciones, o simplemente la convolución, es una operación que permite modelar el comportamiento temporal de un sistema lineal.
- Su tratamiento general se hará en cursos orientados al análisis de señales y sistemas.
- Haremos aquí una breve presentación y veremos su relación con la transformada de Laplace.

Convolución

Definición

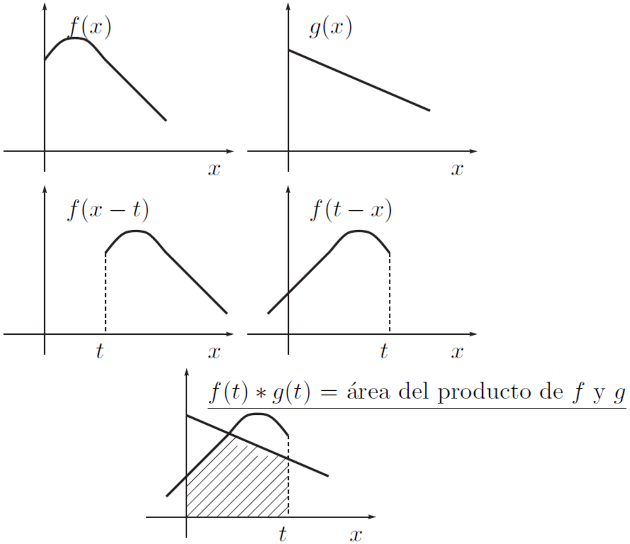
- Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos una nueva función $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$a(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- La igualdad de las integrales anteriores surge simplemente de un cambio de variable, y muestra la conmutatividad de la convolución.
- El caso particular con el que trabajaremos, restringe el dominio de las funciones a la semirrecta positiva, obteniendo

$$a(t) = f(t) * g(t) = \int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Convolución



Convolución

Existencia de la convolución

- Al ser una integral impropia, puede no existir.
- Hay condiciones suficientes para las funciones f y g que aseguran su existencia.
- Por ahora simplemente asumiremos que todo funciona bien.
- En particular, como vimos, si ambas funciones se retringen a $[0, +\infty)$ y son localmente integrables, entonces existe la convolución.

Convolución

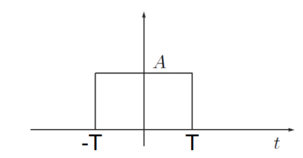
Ejemplo

- $f(t) = Y(t).E, \quad g(t) = Y(t).\frac{t}{T}.$
- $$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{E}{T}\tau d\tau = \frac{E}{T}\left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t = \frac{E}{2T}t^2$$
- Convolucionar con el escalón, integra a la señal.

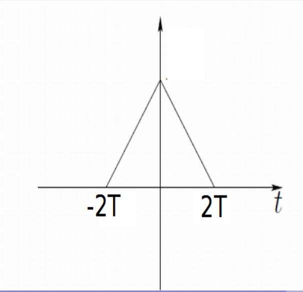
Convolución

Ejemplo (ejercicio)

- $f(t) = A_1.p_T(t)$, $g(t) = A_2.p_T(t)$.



- $a(t) = f(t) * g(t)$



Convolución

Propiedades

- La convolución *suaviza* las señales involucradas.
- Es conmutativa
- Veremos qué sucede al pasar al dominio de Laplace.

Transformada de Laplace del producto convolución

La convolución en Laplace

- La propiedad que demostraremos es la siguiente

$$\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right](s) = F(s).G(s)$$

- La transformada de Laplace transforma el producto en convolución en el producto ordinario de funciones de variable compleja.
- Esto implica en particular que una ecuación en convolución, en el tiempo, se transforma en una ecuación algebraica en Laplace, que despejamos simplemente dividiendo:

$$a(t) * x(t) = b(t) \Rightarrow A(s).X(s) = B(s) \Rightarrow X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Transformada de Laplace del producto convolución

Demostración de la propiedad

- Sea $a(t) = f(t) * g(t)$; f y g con soporte en $[0, +\infty)$. Entonces

$$A(s) = \int_0^{+\infty} [f(t) * g(t)] e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[\int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau$$

- Consideremos el cambio de variable $t - \tau = x$.

$$A(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[\int_{-\tau}^{+\infty} f(x) e^{-s(x+\tau)} dx \right] d\tau$$

- Considerando el soporte de f y viendo bien la exponencial,

$$= \left[\int_0^{+\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] \left[\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \right] = F(s).G(s)$$

Transformada de Laplace del producto convolución

Para pensar

- En un circuito lineal, podemos hallar la relación entre las transformadas de la entrada y la salida, y podemos definir la *transferencia*:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \Rightarrow v_o(t) = h(t) * v_i(t)$$

- Consideremos un amplificador de ganancia K, con entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t) = K.v_i(t)$.
- En Laplace: $V_o(s) = K.V_i(s)$, entonces $H(s) = K$.
- En el tiempo tendríamos: $v_o(t) = v_i(t) * \mathcal{L}^{-1}[K](t) = K.v_i(t)$.
- No existe ninguna función tal que su transformada de Laplace sea constante!!!!