Teoremas de circuitos

Pablo Monzón

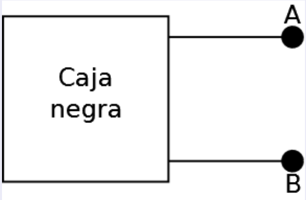
IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020

Teorema de Thévenin

Idea general

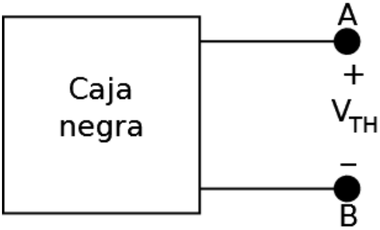
- A veces es de interés analizar una parte de un circuito.
- Por ejemplo, ver cómo la modificación de una o más componentes afecta al resto del circuito.
- La parte del circuito en la que no vamos a focalizarnos, se *encapsula* en un circuito equivalente, representativo a la hora de realizar los análisis de interés.
- Hay que tener cuidado sobre qué quiere decir *equivalente*.
- Consideramos, por ahora, un circuito puramente resistivo.
- Hacemos un modelo *caja negra*.



Definiciones previas

Tensión de vacío V_{TH}

Es la tensión entre los terminales A y B cuando no se extrae corriente de la caja negra (en vacío).

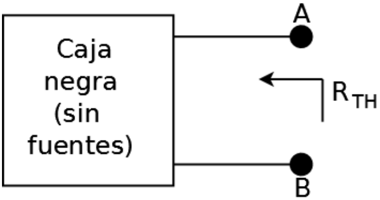


No hay carga conectada, o la carga conectada es tal que no consume corriente a la caja negra.

Definiciones previas

Resistencia de Thévenin R_{TH}

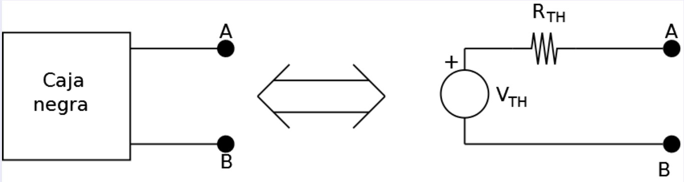
Es la resistencia vista desde los terminales A y B cuando se anulan las fuentes independientes de la caja negra (*driving point*).



Para calcular R_{TH}, se anulan las fuentes independientes, se coloca una fuente externa continua, de valor E, entre A y B y se determina la corriente I que la caja negra le consume a dicha fuente. Finalmente, $R_{TH} = \frac{E}{I} = \frac{V_{AB}}{I}$.

Teorema de Thévenin

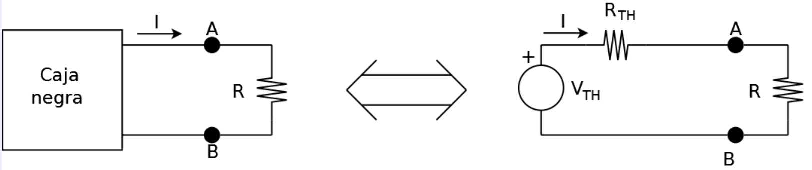
Una caja negra lineal, de terminales A y B, puede representarse por un circuito equivalente de la siguiente manera:



La equivalencia se entiende en el sentido siguiente: desde el punto de vista de los terminales A y B, cualquier circuito que se conecte a ellos recibirá la misma corriente en ambos casos.

Teorema de Thévenin

Resistencia de carga R

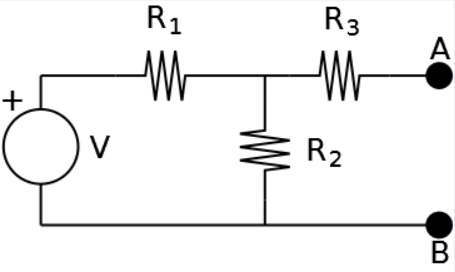


Si se conecta una resistencia R entre A y B, resulta sencillo calcular la corriente y la tensión en R:

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R} \quad , \quad V = V_{TH} \frac{R}{R_{TH} + R}$$

Teorema de Thévenin

Ejemplo

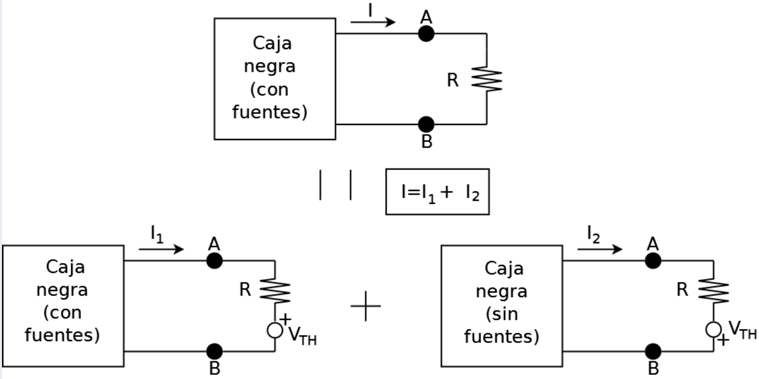


$$V_{TH} = V\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad R_{TH} = R_3 + R_1||R_2$$

Teorema de Thévenin

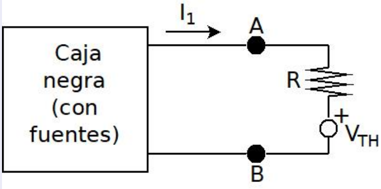
Prueba

- Primero, en la rama de R agregamos dos fuentes auxiliares, de valores $\pm V_{TH}$.
- Luego, aplicamos superposición.
- La siguiente figura esquematiza la idea



Teorema de Thévenin

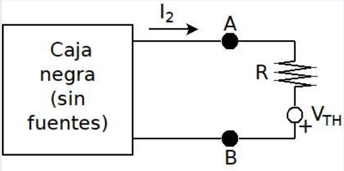
Prueba



- La malla de este circuito puede escribirse así: $V_{AB} = RI_1 + V_{TH}$.
- Por la definición de tensión de vacío, $I_1 = 0$ es solución de esa malla.

Teorema de Thévenin

Prueba



- En este circuito, la malla es similar: $V_{AB} = RI_2 - V_{TH}$, de donde $V_{TH} = Ri_2 - V_{AB}$.
- Por la definición de resistencia vista entre A y B:

$$R_{TH} = \frac{V_{AB}}{-I_2} \Rightarrow V_{AB} = -R_{TH} I_2$$

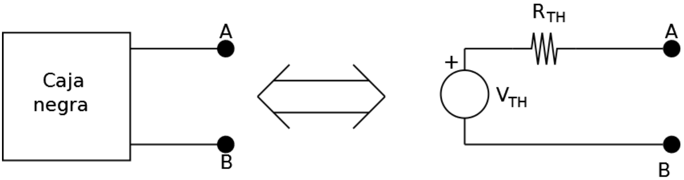
- Finalmente: $V_{TH} = (R + R_{TH})I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_{TH}}{R_{TH}+R}$

Teorema de Thévenin

Prueba

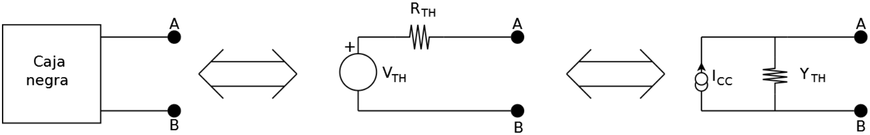
- Entonces

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R}$$

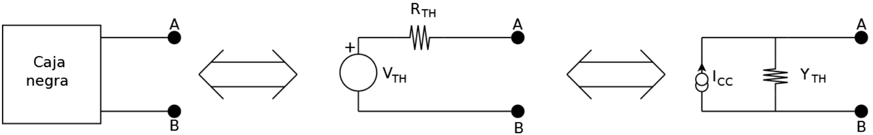


Teorema de Norton

- Similar al Teorema de Thévenin, pero usando un modelo basado en fuente de corriente en lugar de fuente de tensión.
- Usa la *corriente de cortocircuito* I_{CC}, definida como la corriente que circula entre A y B cuando se cortocircuitan dichos puntos.
- Usando Thévenin, es fácil ver que $I_{CC} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = Y_{TH}.V_{TH}$.
- Se obtiene un modelo equivalente, con fuente de corriente y admitancia en paralelo.



Teorema de Norton

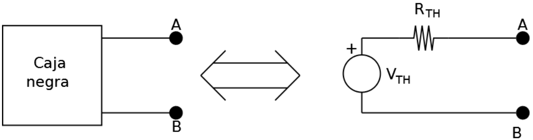


Teorema de Norton

- Si trabajamos con admitancias, el resultado tiene la misma forma que Thévenin.
- La tensión y corriente en una admitancia de carga Y valen:

$$V_Y = \frac{I_{cc}}{Y_{TH} + Y} \Rightarrow I_Y = \frac{Y}{Y_{TH} + Y} I_{cc}$$

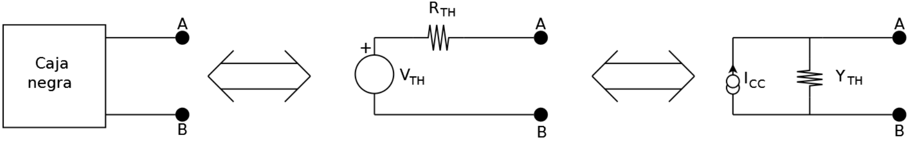
Aplicaciones



Fuente ideal de tensión

- Para que el comportamiento del circuito se asemeje al de una fuente ideal de tensión, se debe cumplir que la tensión en bornes de una carga R que se conecte al circuito no dependa del valor de dicha carga.
- Aplicando el equivalente Thévenin, sabemos que $I_R = \frac{V_{TH}}{R_{TH}+R}$ y $V_R = V_{TH}\frac{R}{R_{TH}+R}$.
- Observemos que, idealmente, alcanza con tener $R_{TH} = 0$.
- En la práctica, alcanza con $R_{TH} \ll R$ (un criterio práctico es el del factor 10).

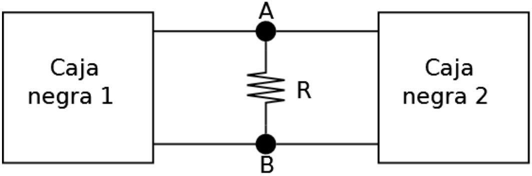
Aplicaciones



Fuente ideal de corriente

- Para que el comportamiento del circuito se asemeje al de una fuente ideal de corriente, se debe cumplir que la corriente por una admitancia Y que se conecte al circuito no dependa del valor de dicha admitancia.
- Aplicando Norton, sabemos que $V_Y = \frac{I_{cc}}{Y_{TH}+Y}$ y $I_Y = \frac{Y}{YTH+Y}.I_{cc}$.
- Observemos que, idealmente, alcanza con tener $Y_{TH} = 0$.
- En la práctica, alcanza con $Y_{TH} \ll Y$ (al menos 10 veces menor).

Aplicaciones



Conexión de dos cajas negras

- Para hallar la corriente por la resistencia R, aplicamos en primer lugar el principio de superposición.
- Ahora podemos aplicar el Teorema de Thévenin en cada una de las cajas negras con fuente.
- Las cajas sin fuentes las sustituimos por su resistencia vista.
- Terminarlo como ejercicio.

Teorema de Tellegen

Enunciado

- Consideremos un circuito cualquiera, con componentes cualesquiera.
- Para la k-ésima componente, sean v_k e i_k la tensión en bornes y la corriente por ella (medida en el sentido de la caída de tensión).
- Entonces:

$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t) i_k(t) = 0 \quad , \forall t$$

 independientemente de cuáles sean las componentes (pueden ser no lineales).

Corolario

Si para las fuentes independientes cambiamos el sentido de las corrientes (*salientes por el* +), entonces el resultado dice que

$$\sum_{fuentes} p_i(t) = \sum_{resto\ del\ circuito} p_j(t)$$

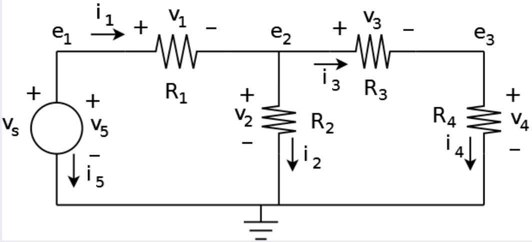
Teorema de Tellegen

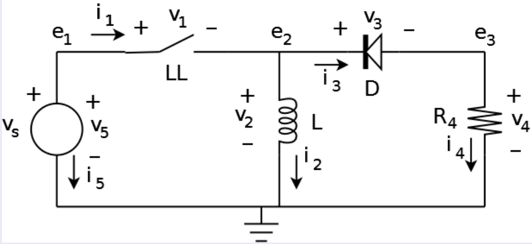
Aplicación

- En una instalación eléctrica, la potencia instantánea consumida a la red es la suma de las potencias instantáneas que consume cada elemento conectado a la red.
- Esto se extiende también a las potencias *activa, reactiva y aparente*, que veremos luego.

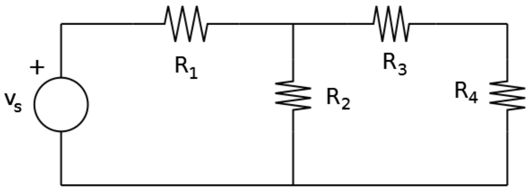
Teorema de Tellegen

Ejemplos

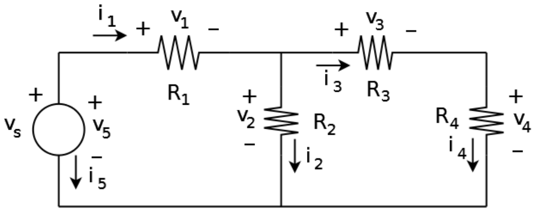




Opcional: previos y prueba

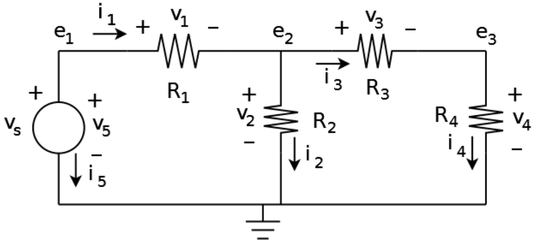


Asignemos polaridades de tensiones y corrientes:



Matriz de incidencia

Elijamos un nodo de referencia y nombremos los demás nodos:

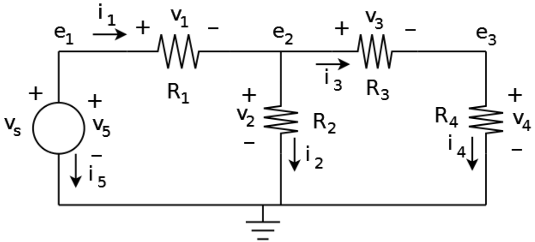


- Definamos la matriz $A_{n \times c}$ de término genérico a_{ij} que vale:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ llega al nodo } i \\ 0 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ no toca al nodo } i \end{cases}$$

siendo n el número de nodos (sin contar el de referencia) y c el número de componentes.

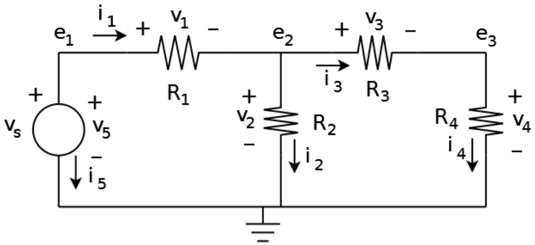
Matriz de incidencia



$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ llega al nodo } i \\ 0 & , \quad \text{si la corriente } j \text{ no toca al nodo } i \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{KCL}{\Rightarrow} A \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = 0$$

Matriz de incidencia



Observemos que:

$$
\begin{array}{rcl}
v_1 & = & e_1 - e_2 \\
v_2 & = & e_2 \\
v_3 & = & e_2 - e_3 \\
v_4 & = & e_3 \\
v_5 & = & e_1
\end{array}
\overset{KVL}{\Rightarrow}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}
$$

Teorema de Tellegen ($\sum_k v_k(t)i_k(t) = 0 \quad , \forall t$)

Prueba

Denotemos por v, e e i los vectores de tensiones de las componentes, tensiones nodales y corrientes por las componentes. La prueba se basa en observar que

$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t)i_k(t) = v^T i = (A^T e)^T i = (e^T A)i = e^T(Ai) = 0$$

independientemente de cuáles sean las componentes!!!.