Teoría de Circuitos - Práctico 5

Diagramas de Bode

1^{er} semestre 2021

Ejercicios obligatorios: 3 (20 %), 4 (20 %), 10 (30 %) y 11 (30 %).
Ejercicios opcionales: 5 (+25 %), 7 (+25 %), 12 (+25 %) y 13 (+25 %).
Fecha de entrega tentativa: **04 de junio a las 23:59**.

Ejercicio 1.

a) Exprese las siguientes cantidades en decibeles (dB): 1, 2, $\sqrt{2}$, 10, 10^6.

b) Use la parte **a)** para calcular las mismas cantidades duplicadas.

c) Use la parte **a)** para calcular las mismas cantidades, a las que se les suma 10.

Ejercicio 2.

a) Se dice que dos frecuencias distan un semitono cuando su cociente es $\sqrt[12]{2}$ o su inverso. Exprese un semitono en término de octavas y décadas.

b) Exprese en octavas y en décadas la banda de frecuencias fundamentales de los siguientes instrumentos:

piano convencional:	$f_{min} = 27.5Hz$;	$f_{max} = 4186Hz$;
guitarra:	$f_{min} = 82.407Hz$;	$f_{max} = 698.46Hz$;
voz de soprano:	$f_{min} = 261.63Hz$;	$f_{max} = 1046.5Hz$;
voz de tenor	$f_{min} = 146.83Hz$;	$f_{max} = 440Hz$;

Ejercicio 3.

En el presente ejercicio, ω designará una variable real, en tanto ω_0 designará un valor particular de la misma. $H(j\omega)$ es una función de variable real ω a valores complejos. Se sugiere recordar que para multiplicar números complejos es conveniente utilizar la expresión polar de los mismos.

a) Dados los siguientes números complejos, hallar módulo y fase.

$$\frac{1}{1+j} \quad , \quad \left.\frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \quad , \quad \frac{1}{1+\frac{j}{10}} \quad , \quad \frac{1}{1+j2} \quad , \quad \frac{1}{1+\frac{j}{2}}$$

b) En la igualdad $Re\left[z.e^{j\omega_0 t}\right] = A.cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$, con z complejo, probar que

$$\begin{cases} A &= |z| \\ \varphi &= arg(z) \end{cases}$$

Aplicarlo a los siguientes casos:

$$Re\left[\frac{1}{1+j}.e^{j\omega_0 t}\right] \quad , \quad Re\left[\frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}.e^{j\omega_0 t}\right]$$

c) Dado $H(j\omega) = -12\frac{(j\omega+1)}{\left(j\omega+\frac{1}{2}\right).(j\omega-10)}$,

i) escribir $Re\left[H(j\omega).e^{j\omega_0 t}\right]$ como función sinusoidal, de la forma $A.cos(\omega_0 t + \varphi)$.

ii) hallar ω_C tal que $|H(j\omega_C)| = 1$. Hallar el correspondiente valor del argumento.

iii) hallar ω_G tal que $H(j\omega_G)$ sea real. **Sugerencia:** igualar $H(j\omega_G)$ a un número real α y luego, imponiendo restricciones sobre la parte real y la imaginaria, hallar α y ω_G.

Ejercicio 4.

Graficar los Diagramas asintóticos de Bode (fase y amplitud) de las siguientes transferencias, indicando los valores exactos en los puntos notables.

$$a)\ \frac{2(j\omega+1)}{(0.1j\omega+1)} \quad , \quad b)\ -\frac{4(2j\omega+1)}{(0.1+j\omega)} \quad , \quad c)\ -\frac{2(0.1j\omega-1)}{(j\omega+1)} \quad ,$$

$$d)\ \frac{10(100.\omega^2+j20\omega)}{(j\omega+2)(10j\omega+1)} \quad , \quad e)\ -\frac{5(0.1j\omega+1)}{j\omega(1+j0.5\omega)\left[1+j0.6\frac{\omega}{50}-\frac{\omega^2}{50^2}\right]}$$

Ejercicio 5.

Considere la siguiente transferencia en régimen sinusoidal: $H_C(j\omega) = \frac{j\omega+\omega_C}{j\omega+k\omega_C}$ con ω_C y k positivos, que se denomina *compensador de atraso-adelanto* (lead-lag compensator), por su capacidad de aportar fase a un sistema dado, siendo una componente sencilla y fundamental en los sistemas de control.

a) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, discutiendo según k mayor o menor que 1.

b) Hallar $k > 1$ para que a la frecuencia $\sqrt{k\omega_C}$ el sistema aporte 37^o de adelanto.

c) ¿El circuito de la figura 5.1 a implementa un retardador o un adelantador? (hallar k).

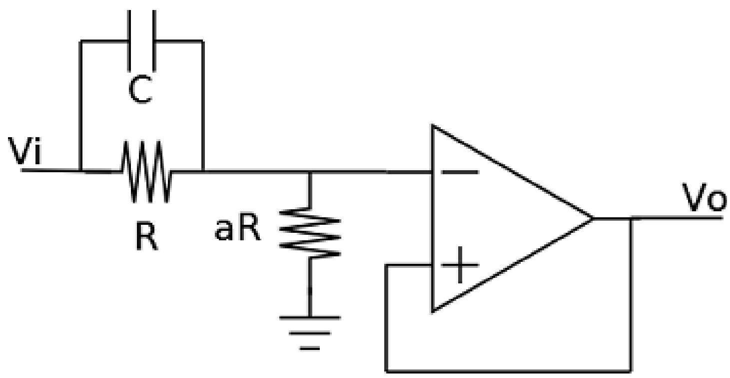

Figura 5.1: Circuito del ejercicio Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Se pretende relevar experimentalmente la transferencia de un circuito lineal. Para ello se excita el mismo con entradas sinusoidales de diferente frecuencia. Con un osciloscopio, se releva la amplitud de la entrada, la amplitud de la salida en régimen y la relación de fase entre ambas señales. Los valores obtenidos (con errores menores a $10mV$ y 1^o) se listan a continuación.

# ensayo	Frecuencia (Hz)	Amp. ent. (V)	Amp. sal. (V)	Desfasaje (^{o})
1	0.1	10	1.33	-2
2	1	10	1.23	-23
3	10	10	0.31	-77
4	100	10	0.03	-89

Hallar una transferencia real, racional, propia (o estrictamente propia), de primer orden, que permita ajustar los puntos relevados experimentalmente. **Sugerencia:** realizar un Diagrama de Bode genérico de una transferencia real racional propia de primer orden y ajustar los parámetros.

Ejercicio 7.

Se considera el circuito de la figura 7.1:

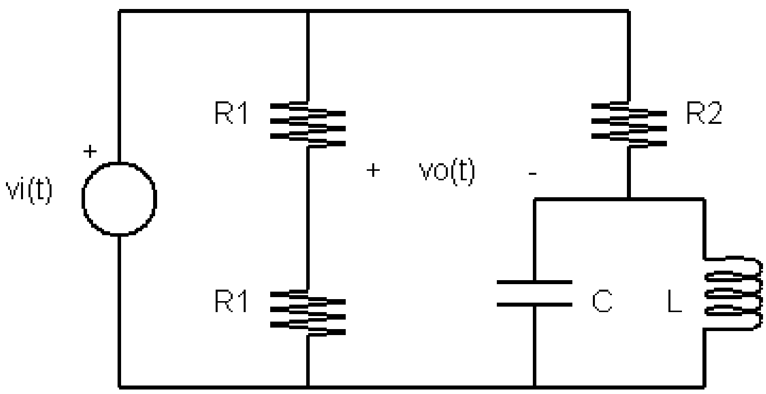

Figura 7.1: Circuito del ejercicio Ejercicio 7.

a) Hallar la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, siendo $V_i(j\omega$ y $V_o(j\omega)$ los fasores asociados a la entrada y la salida en régimen respectivamente.

b) Sabiendo que se cumplen las relaciones $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$. Bosquejar los reales.

c) Hallar la frecuencia ω para la cual se cumple que si la entrada es $v_i(t) = cos(\omega t)$, la salida en régimen es $v_o(t) = -A.cos(\omega t)$ con $A > 0$. Calcular el valor de A.

d) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[V_o(jn) - V_o\left(\frac{j}{n}\right) \right]$$

Ejercicio 8.

En 1930 el ingeniero británico S. Butterworth estudió una técnica particular para diseñar filtros utilizados en la fabricación de amplificadores. La siguiente expresión representa la transferencia en régimen de un filtro pasabajos de Butterworth de cuarto orden:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + 2.6131(j\omega) + 3.4142(j\omega)^2 + 2.6131(j\omega)^3 + (j\omega)^4}$$

a) Verificar que las cuatro raíces tienen módulo igual a 1 y ubicarlas en el círculo unitario (use calculadora o algún algoritmo numérico).

b) Sabiendo que $|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^8}$, realizar el Diagrama de Bode asintótico de módulo de $T(j\omega)$ y ubicar el punto de caída de $3dB$. Observar que la velocidad de decrecimiento del módulo de la transferencia para $\omega \gg 1$ es de $80dB/dec$. Comparar con un filtro pasabajos ideal y con un filtro pasabajos de primer orden (circuito RC) con la misma frecuencia de corte.

Ejercicio 9.

La transferencia en régimen sinusoidal de un filtro pasabanda de segundo orden se puede escribir de manera genérica como

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0}{Q} . \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)(j\omega) + \omega_0^2}$$

donde ω_0 es la frecuencia central del filtro y Q es el **factor de calidad**, que describe cuán bueno es el filtro. Si se tiene $Q > \frac{1}{2}$, el denominador presenta raíces complejas conjugadas:

$$\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

de módulo ω_0. Cuando $Q \to +\infty$, las raíces tienden a ser imaginarias puras.

a) Mostrar que H puede escribirse como:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & = & \frac{K}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \\ arg\, H(j\omega) & = & -atan\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \end{cases}$$

b) Verificar que a las frecuencias ω_1 y ω_2,

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{\omega_0}{2Q} \quad , \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{\omega_0}{2Q}$$

el sistema presenta una atenuación de $\frac{K}{\sqrt{2}}$.

c) Usando Matlab, graficar módulo y fase de H (en escala lineal), para los valores $Q = 0,7$, $Q = 3$ y $Q = 10$, ubicando las frecuencias ω_1 y ω_2.

d) Mostrar que el circuito de la figura implementa un filtro pasabandas de segundo orden, para valores adecuados de R, L y C, con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.

Ejercicio 10.

Se considera el circuito de la figura 10.1. Hallar la transferencia en régimen y dibujar los diagramas de Bode. Verificar que el circuito implementa un **filtro pasabajos**.

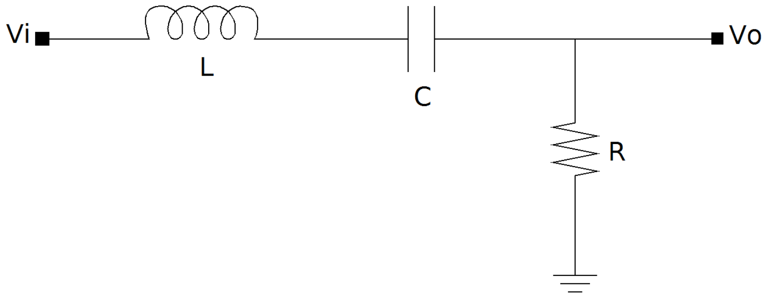

Figura 9.1: Circuito del ejercicio Ejercicio 9.

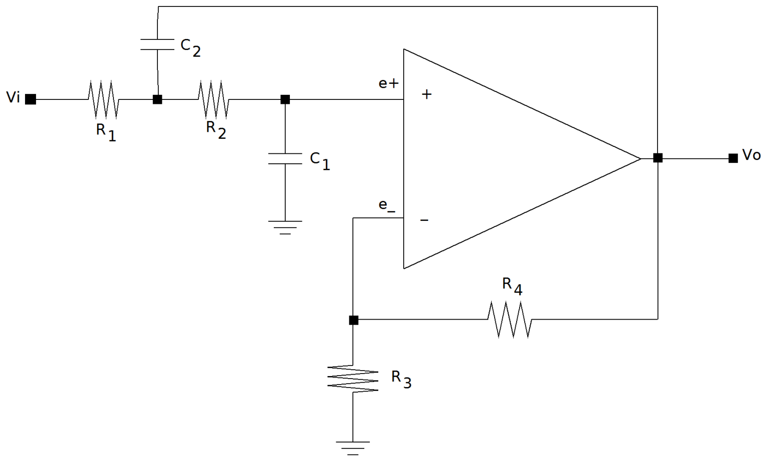

Figura 10.1: Circuito pasabajos del ejercicio Ejercicio 10.

Ejercicio 11.

Se considera el circuito de la figura 11.1. Hallar la transferencia en régimen y dibujar los diagramas de Bode. Verificar que el circuito implementa un **filtro pasa altos**.

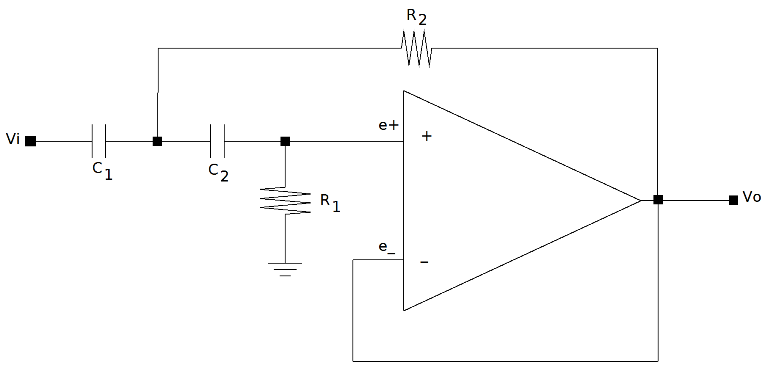

Figura 11.1: Circuito pasa altos del ejercicio Ejercicio 11.

Ejercicio 12.

Diseñar un circuito que implemente un **filtro pasabandas**.

Ejercicio 13.

Este ejercicio se inspira en el TP3 del curso *Taller de Ingeniería Biológica II* y el artículo de Alulbul, A. [1]. Los electrodos de biopotenciales transforman las corrientes iónicas del cuerpo en señales eléctricas. Los electrodos de Ag/AgCl se utilizan comunmente para monitorizar señales de forma no invasiva como por ejemplo ECG y EMG. Para estudiar su desempeño en medición, se realiza un relevamiento en frecuencia de su impedancia. En la figura 13.1 se muestra el modelo eléctrico de la interfaz electrodo-piel, el cual se caracterizará en este ejercicio.

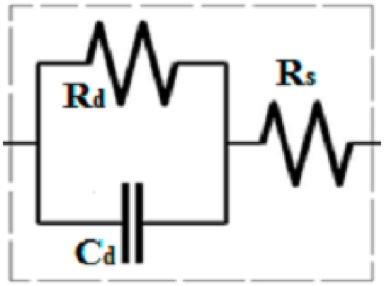

Figura 13.1: Circuito pasa altos del ejercicio Ejercicio 13.

a) Encuentre una expresión para la impedancia del modelo.

b) Bosqueje el diagrama de Bode de la impedancia.
Sugerencia: Considere que la función de transferencia es la impedancia $H(j\omega) = V(j\omega)/I(j\omega) = Z(j\omega)$

c) A partir del relevamiento en frecuencia se obtuvieron los siguientes datos:

- $fc_1 = 39.0Hz$
- $fc_2 = 21.1kHz$
- $|Z(0)| = 21.62k\Omega$
- $\lim_{\omega\to\infty} |Z(j\omega)| = 399.7\Omega$

Determine los componentes del modelo (R_s, R_d y C_d).

d) Considerando los anchos de banda típicos de ECG y EMG concluya acerca del desempeño de los electrodos Ag/AgCl.

[1] Albulbul, A. (2016). Evaluating major electrode types for idle biological signal measurements for modern medical technology. Bioengineering, 3(3), 20.