Teoría de Circuitos 2021

Diagramas de Bode

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

CENUR Litoral Norte

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Contenido

- Repaso - Fasores
- Respuesta en frecuencia
- Transferencia real racional
- Diagrama de Bode - Transferencias de primer orden

Contenido

- **Repaso - Fasores**
- Respuesta en frecuencia
- Transferencia real racional
- Diagrama de Bode - Transferencias de primer orden

Repaso - Fasores

Metodología

- Dado un circuito con entrada sinusoidal $v_i(t)$:

Dominio temporal

$$v_i(t) = E_i \cos(\omega t + \phi_i) \xrightarrow{\text{1' - Resolver ec. diferencial ordinaria}} v_o(t) = E_o \cos(\omega t + \phi_o)$$

1' - Resolver ec. diferencial ordinaria

1 - Pasar a fasores

$$\boxed{V_i\colon\ v_i(t) = Re\left(V_i e^{j\omega t}\right)}$$

3 - Pasar a dominio temporal

$$\boxed{v_o(t) = Re\left(V_o(j\omega) e^{j\omega t}\right)}$$

Circuito en fasores

2 - Resolver expresión algebraica

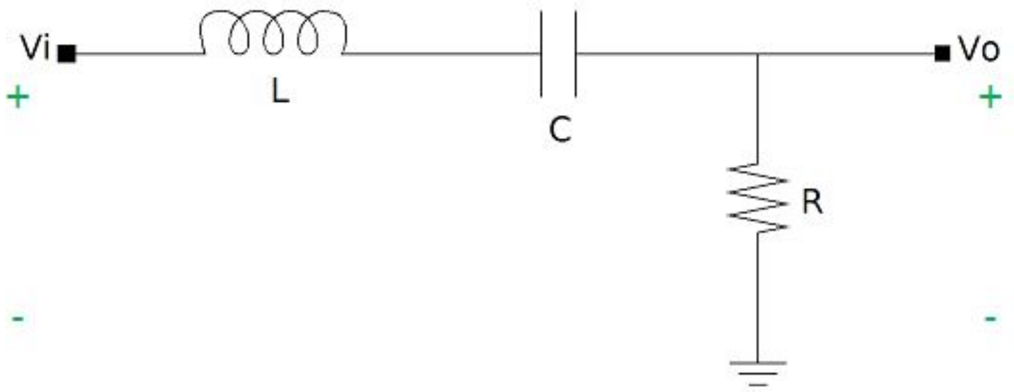
$$V_i = E_i e^{-j\phi_i} \longrightarrow V_o(j\omega) = E_o(j\omega) e^{-j\phi_o}$$

$$\boxed{V_o(j\omega) = S\{V_i\}(j\omega)}$$

Repaso - Fasores

Ejemplo - Circuito RLC

- Objetivo:
    - Hallar una expresión para V_O.

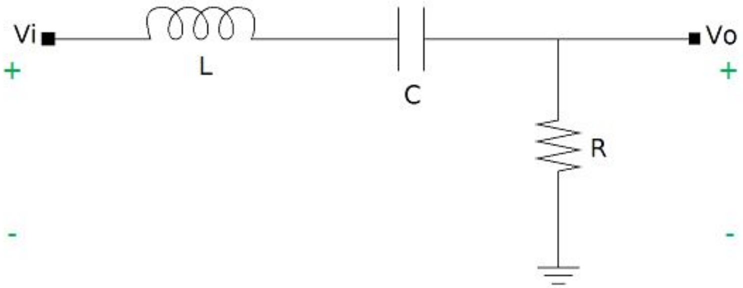


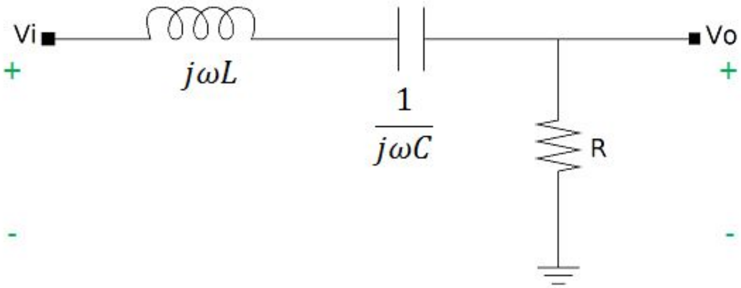
$$v_i = E.\cos(\omega t + \phi_i)$$

Repaso - Fasores

Ejemplo - Circuito RLC

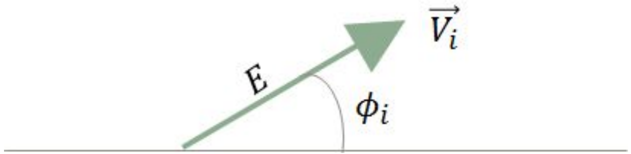
- 1 - Pasar a Fasores





$$\boxed{v_i = E.\cos(\omega t + \phi_i)} \longrightarrow \boxed{V_i = E e^{j\phi_i}}$$

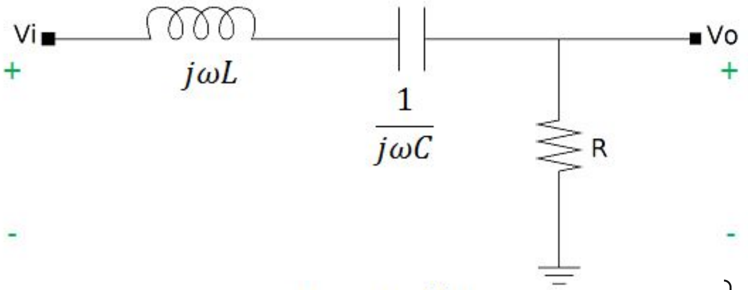
$$v_i = Re\left(E.e^{j(\omega t + \phi_i)}\right) = Re\left(E e^{j\phi_i} e^{j\omega t}\right) = Re\left(V_i e^{j\omega t}\right)$$

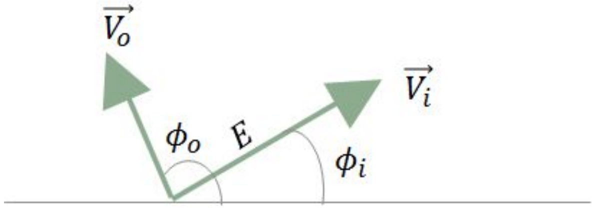


Repaso - Fasores

Ejemplo - Circuito RLC

- 2 - Resolver el circuito en fasores (expresión algebraica)





$$V_i = Ee^{j\phi_i}$$

$$Z_{Eq} = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{(j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1}{j\omega C}$$

$$V_o = \frac{R}{Z_{Eq}} V_i = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1} V_i$$

Función de transferencia:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1}}$$

Repaso - Fasores

Ejemplo - Circuito RLC

- 3 - Pasar a tiempo

$$v_i(t) = Re\left(V_i e^{j\omega t}\right) \longrightarrow v_o(t) = Re\left(V_o e^{j\omega t}\right)$$

$$v_o(t) = Re\left(H(j\omega) V_i e^{j\omega t}\right)$$
$$= Re\left(|H(j\omega)| E e^{j(\omega t + \phi_i + \angle H(j\omega))}\right)$$

$$\boxed{v_o(t) = |H(j\omega)| E \cos(\omega t + \phi_i + \angle H(j\omega))}$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle (j\omega RC) - \angle ((j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} \frac{RC}{1 - \omega^2 LC}$$

Función de transferencia:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + (j\omega)RC + 1}$$

Contenido

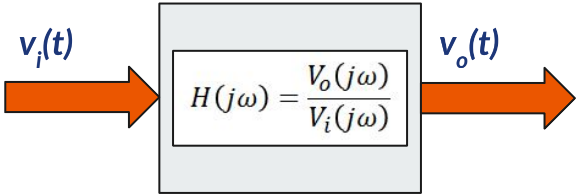
- Repaso - Fasores
- **Respuesta en frecuencia**
- Transferencia real racional
- Diagrama de Bode - Transferencias de primer orden

Respuesta en frecuencia

Transferencia en régimen sinusoidal

- Para una entrada sinusoidal de la forma $v_i(t)=E.\cos(\omega t+\phi_i)$, la respuesta en tiempo tiene la forma:

$$\boxed{v_o(t) = |H(j\omega)|E\cos(\omega t + \phi_i + \angle H(j\omega))}$$



- Como ya se vió, la salida queda determinada por el módulo y fase de la función de transferencia.
- Para entender la naturaleza de la respuesta del sistema, debemos comprender el comportamiento en frecuencia (ω) de $|H(j\omega)|$ y $<H(j\omega)$
- Es útil una representación gráfica para cumplir este objetivo (una imágen vale más que 1000 puntos, imaginen 2!)

Respuesta en frecuencia

Ejemplo RC

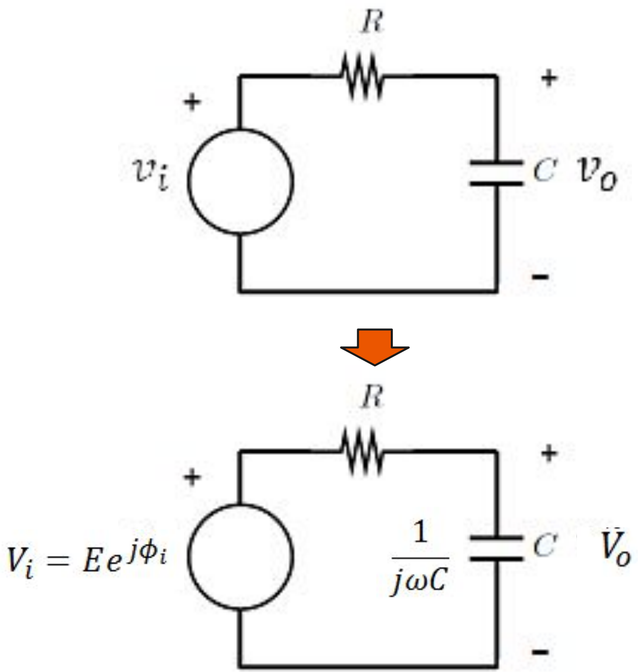
- Recordando el ejemplo de la clase pasada, teníamos que:

$$v_i = E.\cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

$$\boxed{v_o(t) = |H(j\omega)| E \cos(\omega t + \phi_i + < H(j\omega))}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \qquad < H(j\omega) = -\operatorname{atan}(\omega RC)$$



Respuesta en frecuencia

Ejemplo RC

- Considerando:

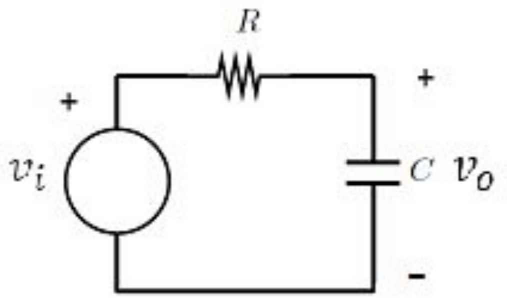
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

la función de transferencia se escribe como:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega_c + j\omega}$$

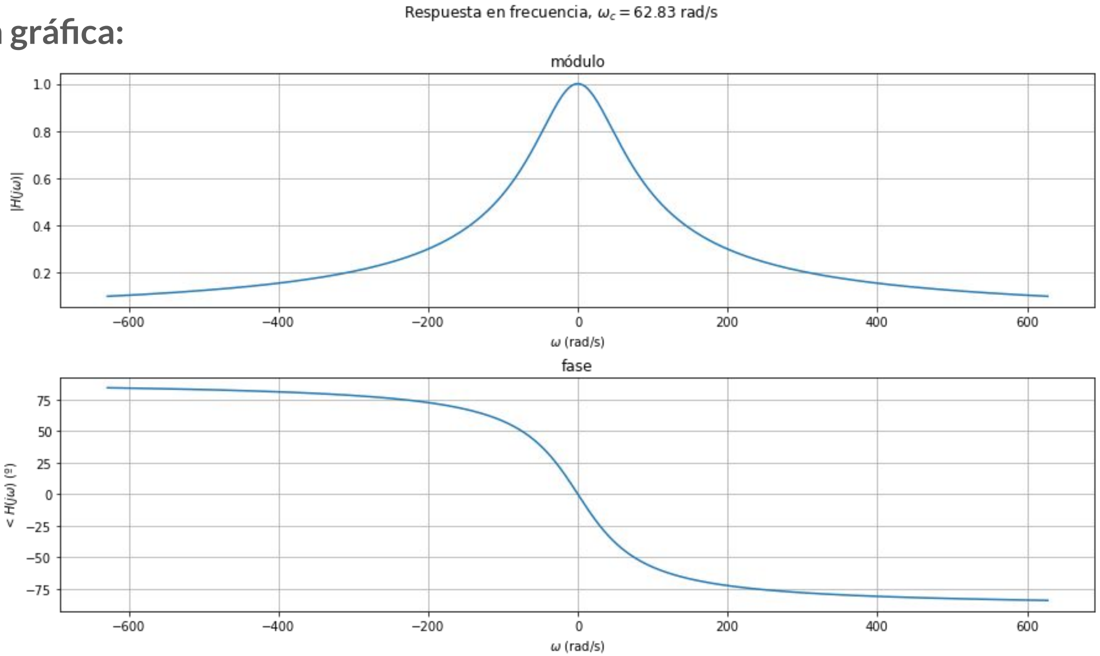
- y su módulo y fase como:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}}, \qquad < H(j\omega) = -\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:



$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}}$$

$$< H(j\omega) = -\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

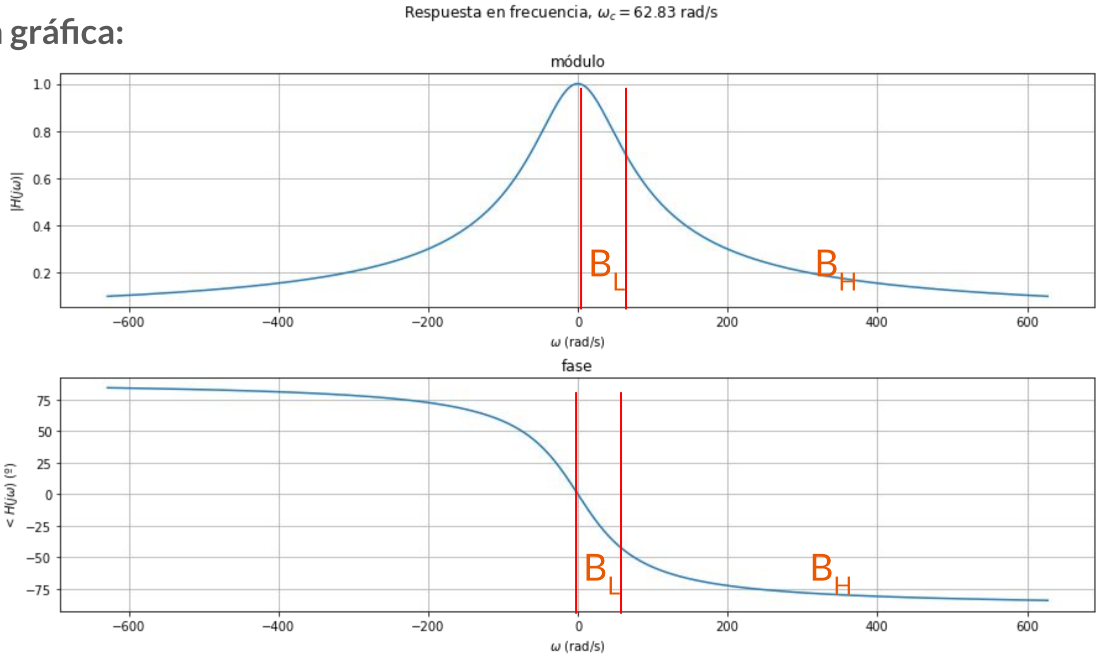
Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:

- **Definición - Banda**
  Un intervalo de frecuencias $B=[\omega_0,\omega_1]$
- En este caso se puede dividir en:
  - Banda de bajas frecuencias: $B_L=(0,\omega_c)$
  - Banda de frecuencias altas: $B_H=(\omega_c,+\infty)$
- Notar que en el gráfico no se pueden visualizar bien ambas bandas.

Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:



$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}}$$

$$< H(j\omega) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:

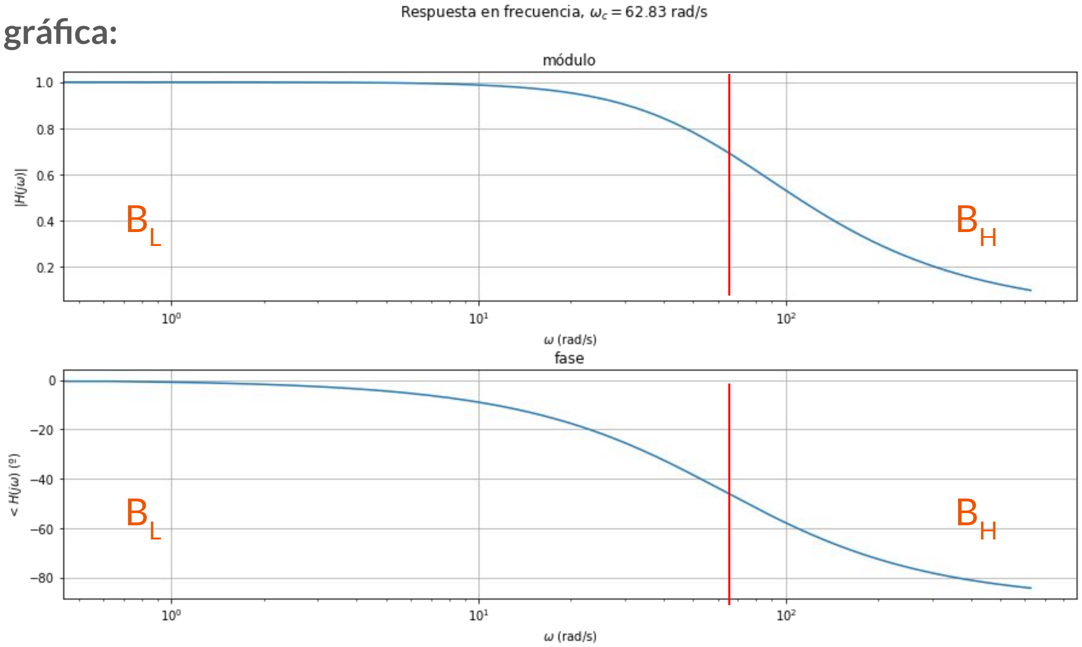
- Alternativa: Escala logarítmica en ω
- **Definición - Distancia logarítmica:**

$$d_{10}(\omega_1, \omega_2) = \log_{10}\omega_1 - \log_{10}\omega_2 = \log_{10}\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

- Se dice que dos frecuencias distan una década si $\boldsymbol{d_{10}(\omega_1,\omega_2) = +/-1}$ (si el cociente entre las frecuencias es 10 o 1/10).
- Observación:
  - Si $\omega=0 \rightarrow \log_{10}\omega = -\infty$ ¡No se puede graficar en escala logarítmica las frecuencias negativas con las positivas!
- Contra observación:
  - Si H(jω) es R.R, cumple que H(-jω)= H*(jω) ya que es H representa cociente de polinomios con coeficientes reales.
  - Entonces |H(-jω)|=|H(jω)| y <H(-jω) = - H(jω), por lo que basta con graficar para ω>0!!! (dem - más adelante)

Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:



Respuesta en frecuencia

Representación gráfica:

- Todavía falta, no hay igualdad de resolución para valores chicos y grandes de $|H(j\omega)|$.
- Alternativa: escala logarítmica en $|H(j\omega)|$
- Definición: Decibeles
  - 1 Bell es una unidad de cocientes logarítmicos de intensidades o potencias.
  - 1 decibel es la décima parte de un Bell
- Sean P_1 y P_2 dos potencias, entonces:

$$\left|\frac{P_2}{P_1}\right|_{db} = 10\left|\frac{P_2}{P_1}\right|_{b} = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

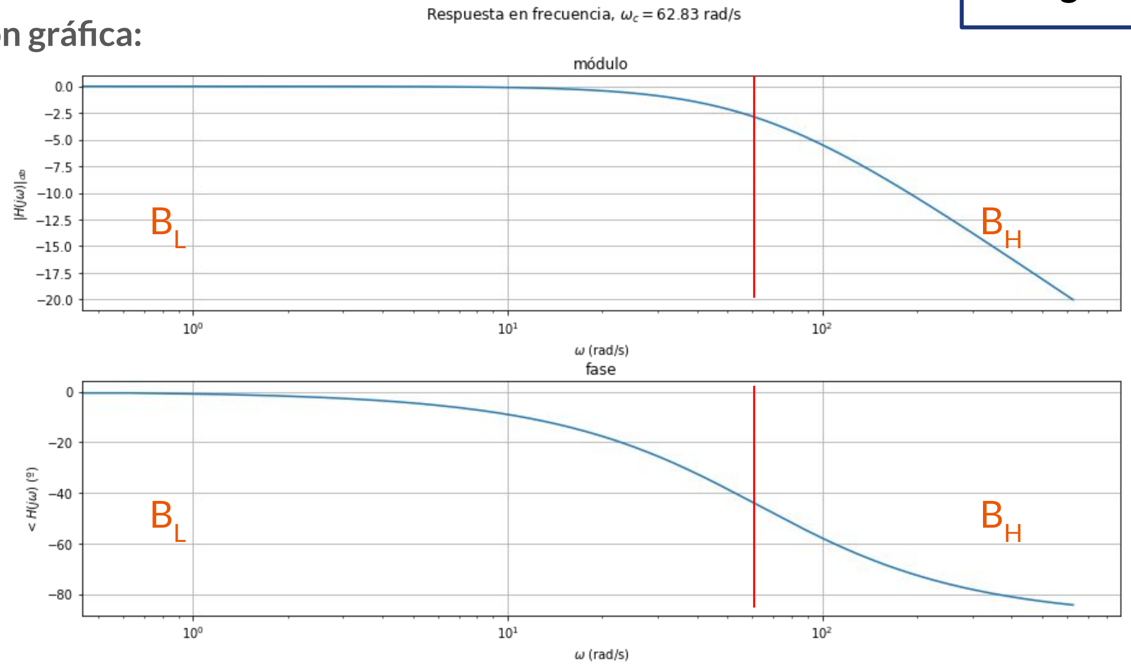
- Considerando que se cumple la relación $P = k.v^2$ y la definición de $|H(j\omega)|$ es $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ se tiene:

$$\boxed{|H(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}(|H(j\omega)|)}$$

Respuesta en frecuencia

Esta representación gráfica la llamaremos **Diagramas de Bode**

Representación gráfica:



Contenido

- Repaso - Fasores
- Respuesta en frecuencia
- **Transferencia real racional**
- Diagrama de Bode - Transferencias de primer orden

Transferencia real racional

Transferencia en régimen sinusoidal

- Como ya se vió, en los sistemas lineales con los elementos que ya vimos, las funciones de transferencia tienen la forma:

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = \frac{\prod_{k=1}^{m} b_m (j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^{n} a_n (j\omega - p_i)}$$

- Se dice que H(jω) es Real y Racional por ser un cociente de polinomios de coeficientes reales.
- Se dice que además es **propia** (RRP) si gr(D(jω))≥gr(N(jω)) (*m*≥*n*) y es **estrictamente propia** si la desigualdad es estricta
- El orden de H(jω) se define como el máximo entre *m* y *n*.
- El conjunto $\{z_k\}$ son los ceros de H(jω) mientras que $\{p_i\}$ son los **polos** de H(jω) (ceros del denominador)

Transferencia real racional

Algunas propiedades

- H(-jω)= H*(jω):

$$H(-j\omega) = \frac{N(-j\omega)}{D(-j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k(-j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_i(-j\omega)^i} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k(-1)^k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_i(-1)^i(j\omega)^i} = \frac{N^*(j\omega)}{D^*(j\omega)} = H^*(j\omega)$$

- Si H(jω) es R.R.P, su límite de es Real:

$$\lim_{\omega\to+\infty} H(j\omega) = \frac{b_m}{a_n}(j\omega)^{m-n} = \begin{cases} \frac{b_m}{a_n} \; si \; n = m \\ 0 \; si \; n > m \end{cases}$$

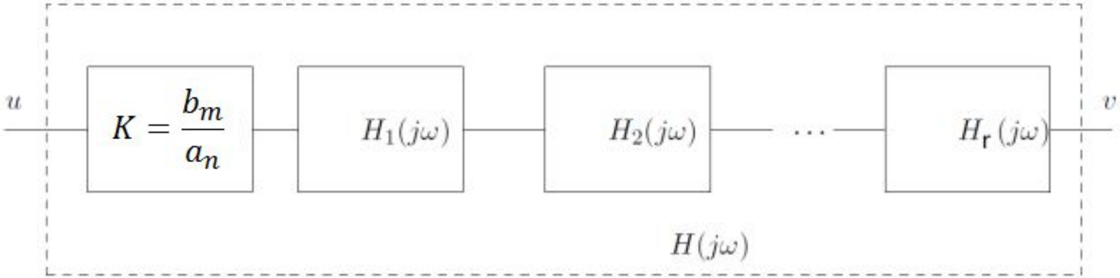
- H(jω) se escribe como el producto (cascada) de funciones elementales:

$$H(j\omega) = \frac{\prod_{k=1}^{m} b_m(j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^{n} a_n(j\omega - p_i)} = K\frac{\prod_{k=1}^{m} (j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)}$$

Transferencia real racional

Cascada de transferencias

- H(jω) se escribe como el producto (cascada) de transferencias elementales:



- Las transferencias elementales tienen la siguiente forma:

$$H_e(j\omega) = \begin{cases} (j\omega - z_k)\ si\ z_k \in \mathbb{R}, & \dfrac{1}{j\omega - p_i}\ si\ p_i \in \mathbb{R} \\ ((j\omega)^2 - 2Re(z_k)\omega + |z_k|^2), & \dfrac{1}{((j\omega)^2 - 2Re(p_i)\omega + |p_i|^2)}\ si\ no \end{cases}$$

Transferencia real racional

¡Para comprender el comportamiento en frecuencia de H(jω) basta con entender el de las funciones elementales!

Cascada de transferencias

- H(jω) se escribe como el producto (cascada) de transferencias elementales:

$$H(j\omega) = \prod_{e=1}^{r} H_e(j\omega)$$

- Su módulo y fase se expresan como:

$$|H(j\omega)|_{db} = 20.\log_{10}\left(\left|\prod_{e=1}^{r} H_e(j\omega)\right|\right) = \sum_{e=1}^{r} 20.\log_{10}(|H_e(j\omega)|) = \sum_{e=1}^{r} |H_e(j\omega)|_{db}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle\left(\prod_{e=1}^{r} H_e(j\omega)\right) = \sum_{e=1}^{r} \angle H_e(j\omega)$$

- En conclusión, tanto el módulo en *db* como la fase de H(jω) se pueden obtener sumando los módulos en db y fase de las funciones $H_e(j\omega)$

Contenido

- Repaso - Fasores
- Respuesta en frecuencia
- Transferencia real racional
- **Diagrama de Bode - Transferencias de primer orden**

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Transferencias de primer orden

- La transferencia de primer orden tiene la forma (supongamos $\omega_c \neq 0$):

$$H(j\omega) = K(j\omega + \omega_c) \qquad H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \omega_c)}$$

- Para bosquejar el diagrama de Bode es se realiza el diagrama asintótico (dibujar asíntotas).

- Realizaremos su diagrama asintótico de la transferencia RRP:

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \omega_c)}$$

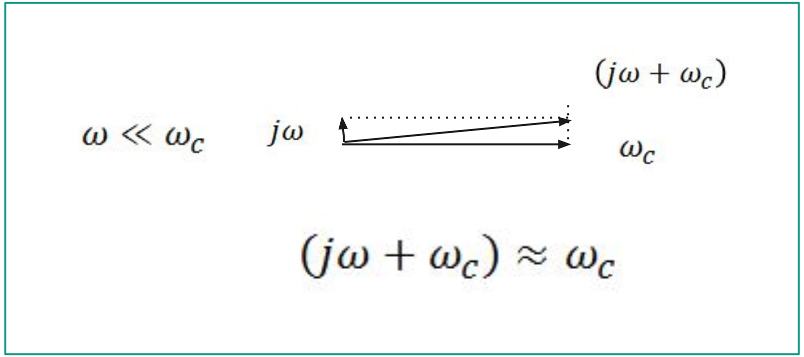
Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Diagrama de bode asintótico

- Para realizar el diagrama asintótico, hay que considerar los casos extremos.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \omega_c)}$$

- En el caso de una transferencia de primer orden, hay que comparar que pasa entre $j\omega$ y ω_c



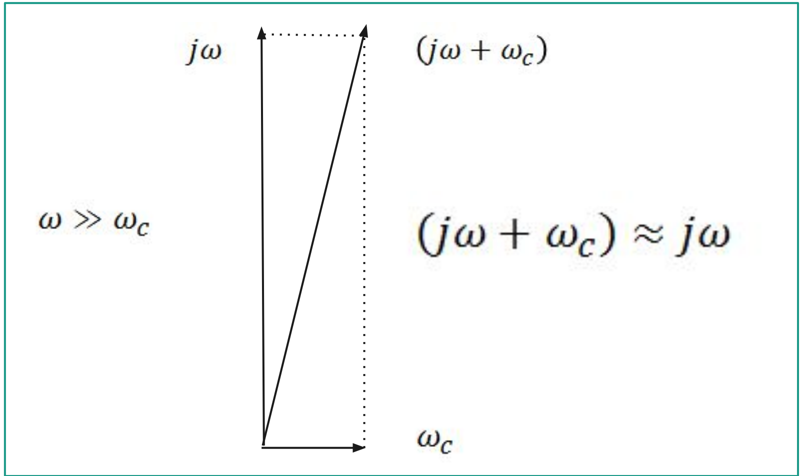


Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Diagrama de bode asintótico

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \omega_c)}$$

- Pasos a seguir
  1. Hallar las frecuencias de corte:
  $$WC = \{\omega_c\}$$
  2. Dividir en bandas:
  $$B_L = (0, \omega_c), B_H = (\omega_c, +\infty)$$
  3. Para cada banda - aproximar:

B_L: $\omega \ll \omega_c$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(\cancel{j\omega} + \omega_c)}$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{\omega_c}$$

$$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega_c} = cte$$

$$\angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle \omega_c = 0, si\ K > 0$$

B_H: $\omega \gg \omega_c$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \cancel{\omega_c})}$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega} = 20\log_{10}K - 20\log_{10}\omega$$

$$\angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle j\omega = -\frac{\pi}{2} = -90^o, si\ K > 0$$

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Diagrama de bode asintótico

- Pasos a seguir

   4. Bosquejar $H_a(j\omega)$

B_L: $\omega \ll \omega_c$

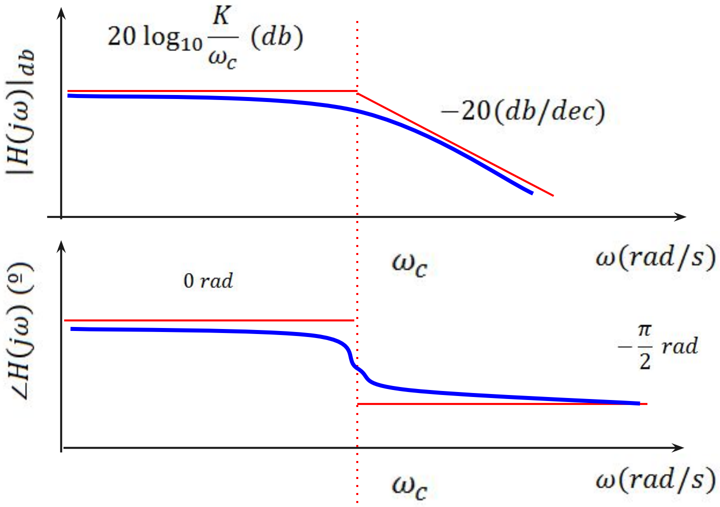
$$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega_c} = cte$$

$$\angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle\omega_c = 0, si\ K > 0$$

B_H: $\omega \gg \omega_c$

$$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega} = \overbrace{20\log_{10}K}^{b}\ \overbrace{-20}^{+\,a\,.}\ \overbrace{\log_{10}\omega}^{x}$$

$$\angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle j\omega = -\frac{\pi}{2} = -90^o, si\ K > 0$$



   5. Bosquejar $H(j\omega)$

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Caso general

- Ejercicio:
  Realice el diagrama de bode de la siguiente función de transferencia (K>0):

$$H(j\omega) = K \frac{j\omega}{(j\omega + \omega_1)(j\omega - \omega_2)}, \qquad \omega_2 > \omega_1$$

- Pasos a seguir:
  1. Hallar el conjunto de las frecuencias de corte:

$$WC = \{|z_k|\backslash 0\} \cup \{|p_i|\backslash 0\} = \{\omega_1, \omega_2\}$$

  2. Dividir en bandas según las frecuencias de corte halladas:

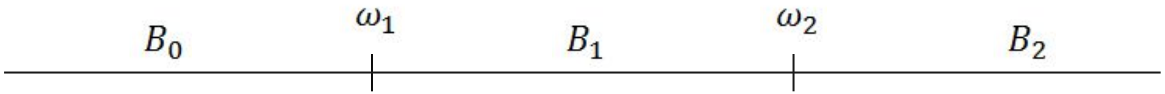


Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Caso general

3. Para cada banda - Aproximar

B_0 $\quad \omega \ll \omega_1$

$$K' = K/\omega_1\omega_2$$

$$H(j\omega) = K\frac{j\omega}{(\cancel{j\omega}+\omega_1)(\cancel{j\omega}-\omega_2)} \longrightarrow H_a(j\omega) = -K\frac{j\omega}{\omega_1\omega_2} \longrightarrow \begin{array}{l} |H_a(j\omega)| = 20\log_{10}K' + 20\log_{10}\omega \\ \angle H_a(j\omega) = \angle -j = -\pi/2 \end{array}$$

B_1 $\quad \omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$

$$H(j\omega) = K\frac{j\omega}{(j\omega+\cancel{\omega_1})(\cancel{j\omega}-\omega_2)} \longrightarrow H_a(j\omega) = -\frac{K}{\omega_2} \longrightarrow \begin{array}{l} |H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega_2} \\ \angle H_a(j\omega) = \angle -1 = -\pi \quad o\ \pi? \end{array}$$

B_2 $\quad \omega \ll \omega_2$

$$H(j\omega) = K\frac{j\omega}{(j\omega+\cancel{\omega_1})(j\omega-\cancel{\omega_2})} \longrightarrow H_a(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \longrightarrow \begin{array}{l} |H_a(j\omega)| = 20\log_{10}K - 20\log_{10}\omega \\ \angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle(j\omega) = -\pi/2 \end{array}$$

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Caso general

- Pasos a seguir

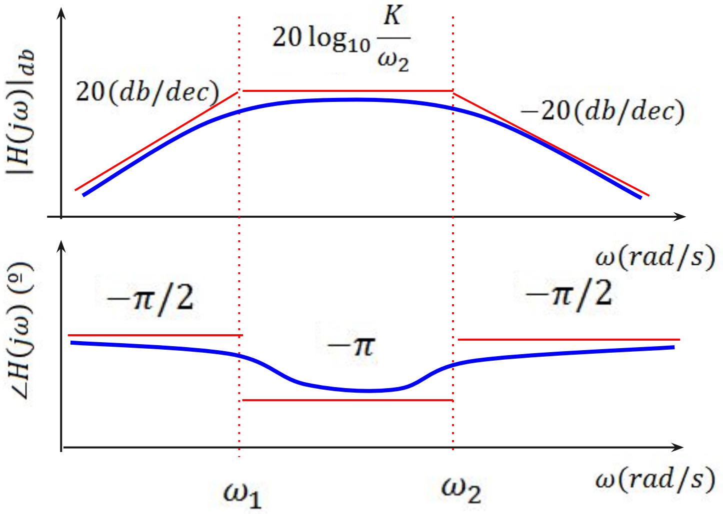
4. Bosquejar $H_a(j\omega)$

B_0 $$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10} K' + 20\log_{10}\omega$$
$$\angle H_a(j\omega) = \angle -j = -\pi/2$$

B_1 $$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{K}{\omega_2}$$ **+/-90º**
$$\angle H_a(j\omega) = \angle -1 = -\pi \quad o\ \pi?$$

B_2 $$|H_a(j\omega)| = 20\log_{10} K - 20\log_{10}\omega$$
$$\angle H_a(j\omega) = \angle K - \angle(j\omega) = -\pi/2$$

5. Bosquejar $H(j\omega)$



FIN