Teoría de Circuitos 2021

Transformada de Laplace 2

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

Resumen - Transformada de Laplace

Definición

- Dada una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define la **transformada unilateral de Laplace** como:

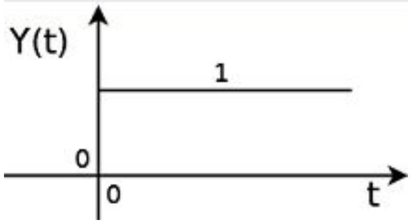
$$\boxed{F:\mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

- Condición de existencia de la transformada de Laplace: **re(s)>α** (abscisa de convergencia)

$$D\big(F(s)\big) = \{s \in \mathbb{C}/re(s) > \alpha\}$$ (semiplano de convergencia)

- Consideraciones acerca de f(t):
  - Si no se aclara lo contrario f(t)=0 para t<0
  - f(t)=f(t).Y(t) donde Y(t) es el escalón de Heavyside.

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$



Resumen - Transformada de Laplace

Algunas propiedades

- Linealidad

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)](s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

- Traslación temporal

$$\mathcal{L}[Y(t-T)f(t-T)](s) = F(s)e^{-Ts}$$

- Traslación en frecuencia

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}](s) = F(s+a)$$

Resumen - Transformada de Laplace

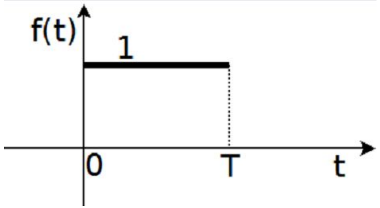
Transformada de algunas funciones

Transformada	Abscisa de convergencia
$\mathcal{L}[Y(t)e^{-at}](s) = \frac{1}{s+a}$	$-Re(a)$ $a \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}[Y(t)](s) = \frac{1}{s}$	0
$\mathcal{L}[Y(t)\sin(\omega_0 t)](s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	0
$\mathcal{L}[Y(t)e^{-at}\sin(\omega_0 t)](s) = \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$-a$ $a \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\left[Y(t)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)\right](s) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$-\zeta\omega_n$

Resumen - Transformada de Laplace

Transformada de algunas funciones

- Pulso rectangular

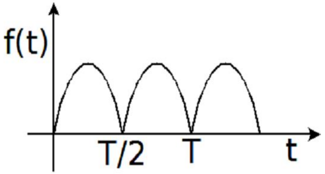


$$f(t) = Y(t) - Y(t-T) \qquad \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

- Función periódica de periodo T ($f(t+T)=f(t) \ \forall t$)

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \quad f_1(t) = \begin{cases} f(t) & si\ t \in (0,T) \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

- Seno rectificado



$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\frac{\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Derivada temporal

- Sea $f(t)$ derivable y transformable y sea $f(0^+)$ su condición inicial.
- La transformada de la derivada temporal se calcula como:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \overset{partes}{=} f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - f(0^+)e^{-s0} + sF(s)$$

- Como $f(t)$ es transformable, el término del límite tiende a 0, por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0^+)}$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Ejemplo 6 - Transformada del coseno

- Aplicando la transformada de la derivada temporal a la función seno:

$$\mathcal{L}[(\sin(\omega_0 t))'](s) = \mathcal{L}[\omega_0 \cos(\omega_0 t)](s) = s\,\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} - 0$$

- Por lo tanto:

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Integración temporal

- Sea $f(t)$ transformable y sea $g(t)$ tal que:

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx$$

- Observando que:

$$g'(t) = f(s) \qquad\qquad g(0^+) = \int_0^0 f(x)dx = 0$$

- Podemos aplicar la transformada de la derivada obteniendo:

$$F(s) = sG(s) - 0$$

- Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) = \frac{F(s)}{s}}$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Derivada en frecuencia

- Sea $f(t)$ transformable y sea $F(s)$ su transformada.
- La derivada de la transformada se calcula como:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \overset{c.u.}{=} \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)te^{-st}dt$$

- Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[-t.f(t)]}$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Ejemplo 7 - Transformada de la rampa

- Recordando que toda función se puede expresar multiplicada por *Y(t)*, aplicando la propiedad anterior se tiene que::

$$\mathcal{L}[Y(t).t](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[Y(t)](s) = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}$$

- Recursivamente se puede obtener una expresión para t^n:

$$\mathcal{L}[Y(t).t^n](s) = -(1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[Y(t)](s) = -(1)^n \left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Observar que con esto podemos transformar un polinomio.

Transformada de Laplace - Propiedades

Teorema del valor inicial

- Enunciado: Sea $f(t)$ transformable y $f(0^+)$ su valor inicial, entonces se cumple que:

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)}$$

- Demostración:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0^+) \xrightarrow{en\ s\to\infty} \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f'(t)](s) = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0^+)$$

- Pero

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f'(t)](s) = \lim_{s\to\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \overset{c.u.}{=} \int_0^{+\infty} f'(t) \lim_{s\to\infty} e^{-st}dt = 0$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Teorema del valor final

- Enunciado: Sea f(t) transformable y $f(0^{+})$ su valor inicial, entonces se cumple que:

$$\boxed{\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)}$$

- Además del caso anterior, se le agrega la restricción de que la abscisa de convergencia sea menor a 0 (existencia de *F(s)* en *s=0*).

- Demostración:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0^{+}) \xrightarrow{en\ s\to 0} \lim_{s\to 0}\mathcal{L}[f'(t)](s) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0^{+})$$

- Pero

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[f'(t)](s) \overset{c.u.}{=} \int_0^{+\infty} f'(t)\lim_{s\to 0} e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0^{+})$$

Transformada de Laplace - Propiedades

Ejemplos

- Hallar el valor inicial y final de *F(s)*: ¿Existen?

$$F(s) = \frac{28s^2 + 54s + 8}{s(s+2)(2s+5)}$$

- Existencia: todos los polos de sF(s) están a la izquierda del eje imaginario!! entonces se puede aplicar TVI y TVF.

$$f(0^+) = 14, \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{4}{5}$$

- Notar que no es necesario resolver la transformada

Ecuaciones diferenciales

Transformadas de ecuaciones diferenciales ordinarias

- Sean *x(t)* n veces diferenciable y *u(n)*, ambas transformables y sea la siguiente ecuación diferencial:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{n-1}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

- Considerando condiciones iniciales nulas y aplicando transformada de Laplace en ambos lados se tiene que:

$$s^n X(s) + a_{n-1}s^{n-1}X(s) + \cdots + a_1 sX(s) + a_0 X(s) \overset{a_n=1}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) X(s) = U(s)$$

- Observación: Al igual que en el caso de fasores, una ecuación diferencial se transforma en una expresión algebraica en el dominio de Laplace!!! Para hallar *x(t)* hay que antitransformar..

Ecuaciones diferenciales

Metodología

- Dado un circuito con entrada sinusoidal $v_i(t)$:

Dominio temporal

$$v_i(t) = f(v_0(t)) \longrightarrow v_o(t)$$

1' - Resolver ec. diferencial ordinaria

1 - Transformar

$\mathcal{L}[*]$

3 - Pasar a dominio temporal

$\mathcal{L}^{-1}[*]$

Circuito en fasores

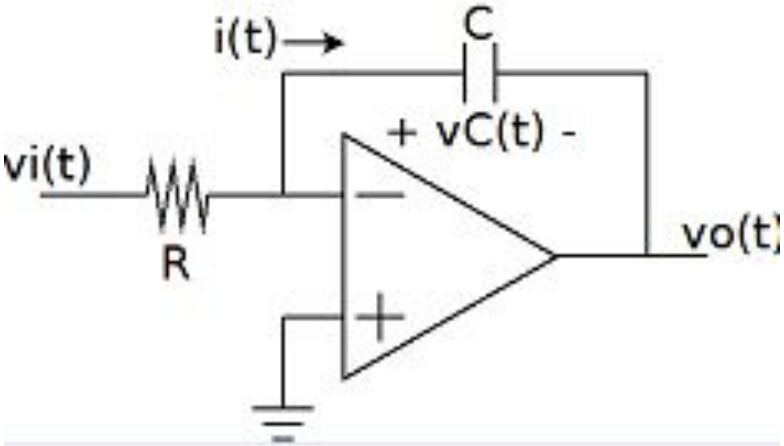
2 - Resolver expresión algebraica

$$V_i(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \, V_o(s) \longrightarrow V_o(s)$$

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo

- Resolver el siguiente circuito:



Antitransformada de Laplace

Estrategia

- Para resolver una antitransformada se necesitan herramientas de funciones de variable compleja más sofisticadas que no trabajaremos en el curso.
- Pero ya conocemos la transformada de varias funciones elementales que aparecen en los circuitos vistos hasta ahora:

$$\frac{1}{s+a}, \qquad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad e^{-sT}$$

- La estrategia consiste en expresar la expresión algebraica en el dominio de Laplace en suma de expresiones con antitransformada conocida.v
- Observando que la expresión de una ecuación diferencial ordinaria puede expresarse como un cociente de polinomios (funciones reales racionales), partiremos de allí.

Antitransformada de Laplace

Estrategia

- Como ya vimos, una función real racional se expresa como:

$$F(s) = K\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i} = K\frac{\prod_{k=1}^{m}(s - z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

- La abscisa de convergencia de esta expresión está dada por $max(Re(p_i))$, $i \in \{1..n\}$.

- Para expresar *F(s)* como suma de términos atómicos conocidos aplicaremos el **método de fracciones simples**.

Antitransformada de Laplace

Fracciones simples

- Este método se aplica principalmente en el caso de expresiones Reales, Racionales y Propias en sentido estricto (n>m), pero puede extenderse fácilmente a todas las expresiones Reales y Racionales.

- Para cada polo p_i sus expresiones atómicas asociadas se expresan como:

$$\frac{A_{i,1}}{s+p_i}+\frac{A_{i,2}}{(s+p_i)^2}+\cdots+\frac{A_{i,n_i}}{(s+p_i)^{n_i}} \quad si\ p_i \in \mathbb{R}\ con\ multiplicidad\ n_i$$

$$\frac{M_{i,1}s+N_{i,1}}{s^2+2Re(p_i)s+|p_i|^2}+\cdots+\frac{M_{i,n_i}s+N_{i,n_i}}{(s^2+2Re(p_i)s+|p_i|^2)^{n_i}} \quad si\ p_i \in \mathbb{C}\ con\ multiplicidad\ n_i$$

- Notar que estas expresiones son conocidas, veamos unos ejemplos.

Antitransformada de Laplace

Ejemplos

- Resolver

$$F(s) = \frac{10s}{s^2 + 5s + 6}$$

- Solución:

$$F(s) = \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{s+3}\ , B_1 = -20, B_2 = 30$$

Antitransformada de Laplace

Ejemplos

- Resolver

$$F(s) = \frac{15s^2 - 16s - 7}{(s+2)(s^2+6s+25)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{Bs+C}{s^2+6s+25}$$

- Solución:

$$A = 5, B = 10, C = -66$$

FIN