Teoría de Circuitos 2021

Diagramas de Bode 2

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

Contenido

- Repaso - Clase pasada
- Diagrama de Bode - Transferencias de segundo orden

Contenido

- **Repaso - Clase pasada**
- Diagrama de Bode - Transferencias de segundo orden

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Regla general - todas las $H_e(j\omega)$ de primer orden

- Pasos a seguir:
  1. Hallar el conjunto de las frecuencias de corte:

$$WC = \{|z_k| \backslash 0\} \cup \{|p_i| \backslash 0\}$$

  2. Dividir en bandas según las frecuencias de corte halladas:

  3. Para cada banda - Aproximar

Recordar: $\angle H_a(j\omega)|_{e+1} = \angle H_a(j\omega)|_e \pm \pi/2$

$$B_e: \quad \omega_e \ll \omega \ll \omega_{e+1}$$

$$H_a(j\omega): \begin{cases} \text{Términos: } (j\omega \pm \omega_l) \rightarrow j\omega, \; si \; l \geq e+1 \\ \text{Términos: } (j\omega \pm \omega_l) \rightarrow \pm\omega_l, \; si \; l \leq e \end{cases}$$

El ángulo de variación de los binomios no puede ser mayor a un ángulo recto

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Regla general - todas las $H_e(j\omega)$ de primer orden

- Pasos a seguir:
  4. Bosquejar $H_a(j\omega)$
  5. Bosquejar $H(j\omega)$
- En ciertos análisis prácticos, se utiliza el valor de $H_a(j\omega)$ como referencia del valor de la función de transferencia

¿Cuál es el error cometido al realizar la aproximación $H(j\omega)=H_a(j\omega)$?

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Error de aproximación

- Definición: Error de aproximación

$$E_{aprox}(j\omega)[db] = |H(j\omega)|_{db} - |H_a(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}\left|\frac{H(j\omega)}{H_a(j\omega)}\right|$$

- En la transferencia elemental de primer orden vista teníamos:

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + \omega_c)} \longrightarrow |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$H_a(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{K}{\omega_c} & si\ \omega < \omega_c \\ \dfrac{K}{j\omega} & si\ \omega > \omega_c \end{cases} \longrightarrow |H_a(j\omega)| = \begin{cases} \dfrac{K}{\omega_c} & si\ \omega < \omega_c \\ \dfrac{K}{\omega} & si\ \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$\longrightarrow E_{aprox}(j\omega) = \begin{cases} 20\log_{10}\dfrac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} & si\ \omega < \omega_c \\ 20\log_{10}\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} & si\ \omega > \omega_c \end{cases}$$

Notar que E_{aprox} no depende de K

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

Error de aproximación

- Veamos como cambia E_{aprox} para distintas frecuencias

$$E_{aprox}(j\omega) = \begin{cases} 20\log_{10}\dfrac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}} & si\ \omega < \omega_c \\ 20\log_{10}\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}} & si\ \omega > \omega_c \end{cases}$$

ω	$\left\lvert\dfrac{H(j\omega)}{H_a(j\omega)}\right\rvert$	$E_{Aprox}(j\omega)$
0.1 ω_c	0.995	-0.043 db
0.5 ω_c	0.894	-0.97 db ≅ -1db
ω_c	0.707	-3.01 db ≅ -3db
10 ω_c	0.995	-0.97 db ≅ -1db
100 ω_c	0.999...≅1	-4.3×10^{-4}db ≅ 0db

Diagrama de bode - Transferencias de primer orden

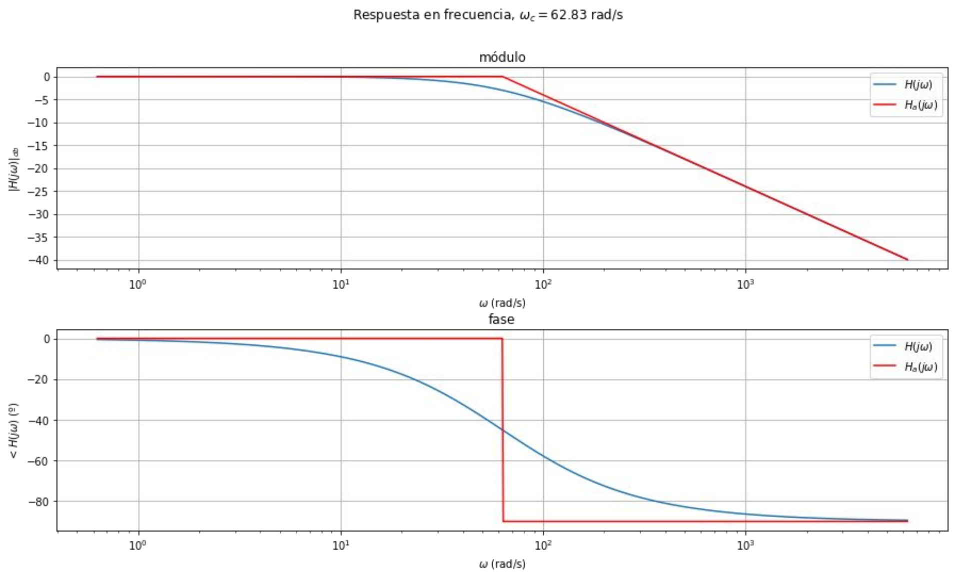
Retomando el ejemplo del RC

- Función de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega_c + j\omega}$$

  - Para frecuencias bajas: H(jω)=1
  - Para frecuencias altas: H(jω) → 0

- Es un filtro pasabajo!!!



Contenido

- Repaso - Clase pasada
- **Diagrama de Bode - Transferencias de segundo orden**

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Transferencias de segundo orden

- La transferencia de segundo orden tiene la forma (supongamos $\omega_c \neq 0$ y $K>0$):

$$H(j\omega) = K\left((j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2\right) \quad H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2}$$

- Notar que $|\zeta|<1$ (condición para que los polos de H sean complejos conjugados).
- Realizaremos su diagrama asintótico de la transferencia RRP:

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2}$$

- Comenzaremos aplicando los mismos pasos que para transferencias de primer orden.

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Diagrama de bode asintótico

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2}$$

- Pasos a seguir
  1. Hallar las frecuencias de corte:

$$WC = \{\omega_c\}$$

  2. Dividir en bandas:

$$B_L = (0, \omega_c), B_H = (\omega_c, +\infty)$$

  3. Para cada banda - aproximar:

B_L: $\omega \ll \omega_c$

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{\cancel{(j\omega)^2} + \cancel{2\zeta\omega_c(j\omega)} + \omega_c^2} \qquad K' = \sqrt{K}$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{\omega_c^2} \quad |H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K'/\omega_c\,, \angle H_a(j\omega) = 0$$

B_H: $\omega \gg \omega_c$

$$|H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K' - 40\log_{10}\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + \cancel{2\zeta\omega_c(j\omega)} + \cancel{\omega_c^2}} \qquad \angle H_a(j\omega) = \pi?\,, -\pi?$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$$

¿Qué pasa acá?

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Diagrama de bode asintótico

- Considerando los casos extremos

- En el caso de una transferencia de primer orden, hay que comparar que pasa entre jω y ω_c

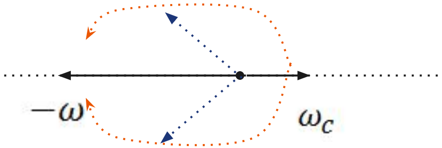
$\omega \ll \omega_c \longrightarrow \omega_c$

$$(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2 \approx \omega_c$$

$\omega \gg \omega_c \quad -\omega \longleftarrow$

$$(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2 \approx -\omega$$

¿Qué pasa con la parte imaginaria?



???

Es necesario evaluar en un punto intermedio para saber su recorrido

El mejor candidato es $\omega=\omega_c$

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Diagrama de bode asintótico

- Pasos a seguir

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega) + \omega_c^2}$$

3. Para cada banda - aproximar:

B_L: $\omega \ll \omega_c$

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{\cancel{(j\omega)^2} + \cancel{2\zeta\omega_c(j\omega)} + \omega_c^2} \qquad K' = \sqrt{K}$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{\omega_c^2} \qquad |H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K'/\omega_c \, , \angle H_a(j\omega) = 0$$

B_H: $\omega \gg \omega_c$

$$|H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K' - 40\log_{10}\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega)^2 + \cancel{2\zeta\omega_c(j\omega)} + \cancel{\omega_c^2}} \qquad \angle H_a(j\omega) = \pi? \, , -\pi?$$

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$$

$\omega = \omega_c$

$$|H(j\omega_c)|_{db} = 40\log K'/\omega_c - 20\log_{10} 2\zeta$$

$$H(j\omega_c) = \frac{\mathrm{K}}{(j\omega_c)^2 + 2\zeta\omega_c(j\omega_c) + \omega_c^2} = \frac{\mathrm{K}}{-\omega_c^2 + \omega_c^2 + 2j\zeta\omega_c^2} = \frac{K}{2j\zeta\omega_c^2}$$

$$\angle H_a(j\omega_c) = \angle K - \angle(2j\zeta\omega_c^2) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & si\ \zeta > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & si\ \zeta < 0 \end{cases}$$

Entonces $\zeta > 0$: $\boxed{B_H:\ \omega \gg \omega_c \qquad \angle H_a(j\omega) = -\pi}$

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Diagrama de bode asintótico

4. Bosquejar $H_a(j\omega)$

B_L: $\omega \ll \omega_c$

$$|H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K'/\omega_c\,, \angle H_a(j\omega) = 0$$

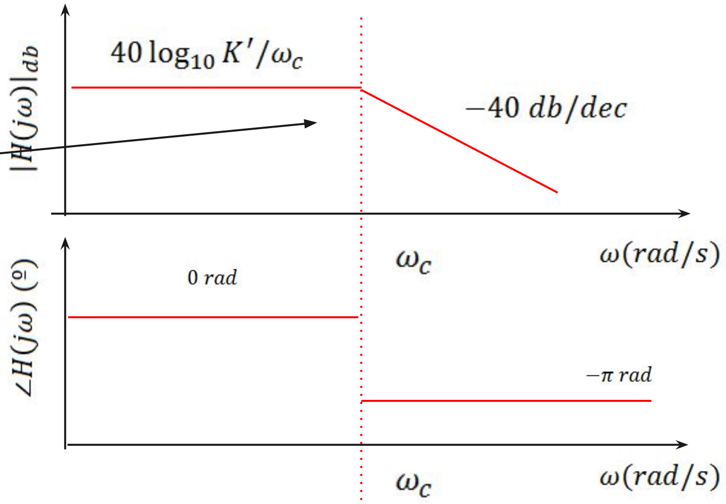
$\omega = \omega_c$

$$|H(j\omega_c)|_{db} = 40\log K'/\omega_c \boxed{-20\log_{10} 2\zeta}$$

$$\angle H_a(j\omega_c) = \angle K - \angle(2j\zeta\omega_c^2) = -\pi/2$$

B_H: $\omega \gg \omega_c$ $\qquad$ $\zeta > 0$

$$|H_a(j\omega)|_{db} = 40\log_{10} K' - 40\log_{10}\omega \qquad \angle H_a(j\omega) = -\pi$$



5. Bosquejar $H(j\omega)$

Diagrama de bode - Transferencias de 2do orden

Diagrama de bode asintótico

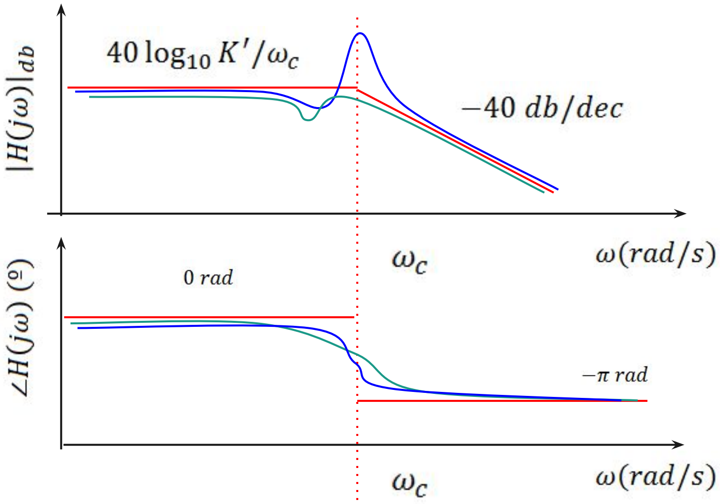
5. Bosquejar H(jω)
   - Discutir según ζ: $\zeta > 0$

$$Sí\ 0{,}5 < |\zeta| < 1 \rightarrow -20\log_{10} 2\zeta < 0$$
$$Sí\ |\zeta| < 0{,}5 \rightarrow -20\log_{10} 2\zeta > 0$$

Error de aproximación en $\omega = \omega_c$

$$E_{aprox} = -20\log_{10} 2\zeta$$

Notar que el error de aproximación diverge si ζ es muy chico (efecto resonancia)



FIN