Teoría de Circuitos 2022

Régimen sinusoidal - 2

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

Contenido

- Circuitos en régimen sinusoidal
- Transformadores
- Teorema de Circuitos
- Potencia

Contenido

- **Circuitos en régimen sinusoidal**
- Transformadores
- Teorema de Circuitos
- Potencia

Circuitos en régimen sinusoidal

Respuesta en régimen sinusoidal - Dominio en fasores

- La relación de un sistema lineal en régimen sinusoidal extendida a números complejos queda:

$$\boxed{S(V_i e^{j(\omega t+\phi_i)}) = V_o e^{j(\omega t+\phi_o)}}$$

- Donde su relación con el dominio temporal viene dada por:

$$v_o(t) = Re\left(\tilde{V}_o e^{j\omega t}\right) = S\left(Re\left(\tilde{V}_i e^{j\omega t}\right)\right) = S(v_i(t))$$

En conclusión, para resolver un problema en régimen sinusoidal, se puede simplificar el problema pasando al mundo complejo.

Circuitos en régimen sinusoidal

Metodología

- Dado un circuito con entrada sinusoidal $v_i(t)$:

Dominio temporal

$$v_i(t) = E_i \cos(\omega t + \phi_i)$$

1' - Resolver ec. diferencial ordinaria

$$v_o(t) = E_o \cos(\omega t + \phi_o)$$

1 - Pasar a fasores

$$V_i:\ v_i(t) = Re\left(V_i e^{j\omega t}\right)$$

3 - Pasar a dominio temporal

$$v_o(t) = Re\left(V_o(j\omega) e^{j\omega t}\right)$$

Circuito en fasores

2 - Resolver expresión algebraica

$$V_i = E_i e^{-j\phi_i}$$

$$V_o(j\omega) = S\{V_i\}(j\omega)$$

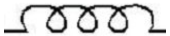
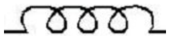
$$V_o(j\omega) = E_o(j\omega) e^{-j\phi_o}$$

Circuitos en régimen sinusoidal

¡En el dominio fasorial se pueden aplicar lo ya visto en los tres temas anteriores del curso!

Resolución de circuitos en régimen sinusoidal - Metodología

- Dado un circuito con entrada sinusoidal $v_i(t)$:

Dominio temporal	**Circuito en fasores**
$v_i(t) = E_i \cos(\omega t + \phi_i)$ →	$V_i = E_i e^{-j\phi_i}$
Régimen sinusoidal	Régimen en continua
R  →	R 
C  →	1/jωC 
L  →	jωL 

Circuitos RLC

Puramente resistivo

Circuitos en régimen sinusoidal

“Ley de Ohm” en fasores:

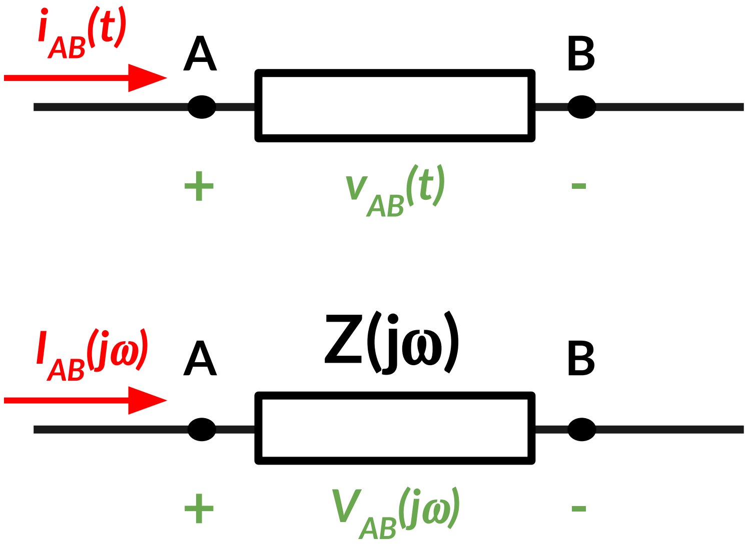
- Dado un elemento conectado entre las terminales A y B donde:
    - v_{AB} es la tensión en régimen sinusoidal entre A y B.
    - i_{AB} es la corriente que pasa por el elemento.

- Se define como ***impedancia*** del elemento al cociente:

$$Z(j\omega) = \frac{V_{AB}(j\omega)}{I_{AB}(j\omega)} = R(j\omega) + jX(j\omega) = |Z|\angle\phi_Z$$

- Donde *R* es la resistencia y *X* es la reactancia.

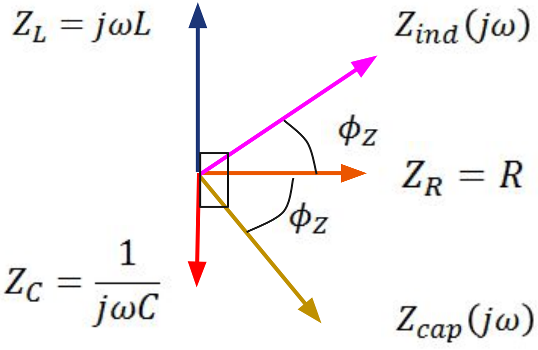
- Su unidad es la misma que la resistencia (Ohms).



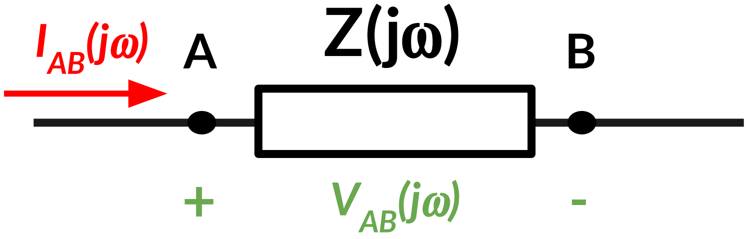
Circuitos en régimen sinusoidal

“Ley de Ohm” en fasores:

- Fasor asociado:



- Características:
    - Entre -π/2 y π/2 ($R(j\omega)>0\ \forall\ \omega$).
    - Si $\varphi_Z>0 \rightarrow$ Z es de tipo inductivo.
    - Si $\varphi_Z<0 \rightarrow$ Z es de tipo capacitivo.



$$Z(j\omega) = \frac{V_{AB}(j\omega)}{I_{AB}(j\omega)} = R(j\omega) + jX(j\omega) = |Z|\angle\phi_Z$$

Admitancia: $Y(j\omega) = \frac{I_{AB}(j\omega)}{V_{AB}(j\omega)} = G(j\omega) + jB(j\omega)$

- $G(j\omega)$: Conductancia
- $B(j\omega)$: Susceptancia

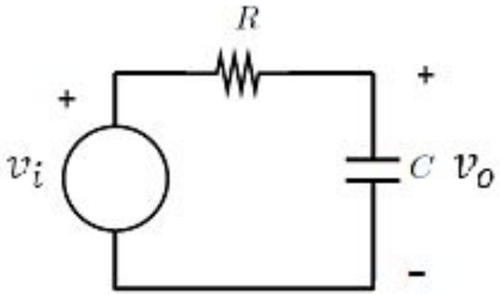
Circuitos en régimen sinusoidal

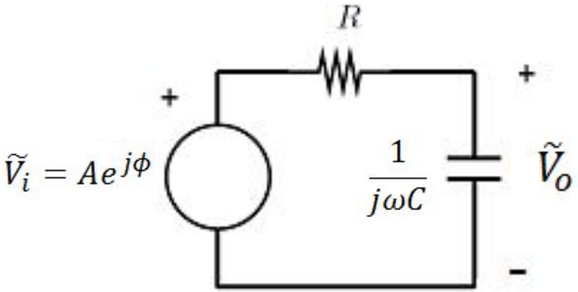
Ejemplo - Circuito RC - $v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

- La clase pasada se resolvió en fasores donde se cumple :

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}$$

- Observaciones:
  - Z(jω) es de tipo capacitivo.
  - Si ω→ 0:
    - Z(jω) ≃ 1/jω → +∞ (circuito abierto) → v_o=v_i.
    - φ_Z → -π/2
  - Si ω→ +∞:
    - Z(jω) ≃ R (C ≃ cortocircuito) → v_o= 0V.
    - φ_Z → 0





Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Dado un circuito en régimen sinusoidal con entrada *e(t)* y salida *s(t)* con fasores asociados $E(j\omega)$ y $S(j\omega)$ respectivamente, se define transferencia en régimen sinusoidal al cociente:

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

- Veamos algunos ejemplos.

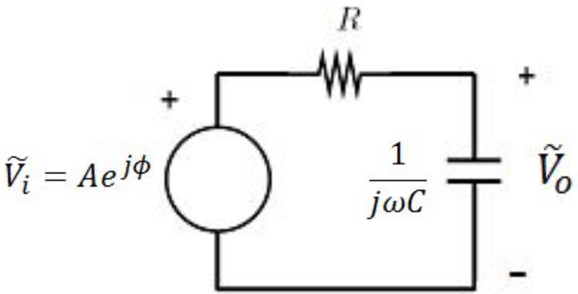
Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Ejemplo 1: Circuito RC

$$\boxed{\tilde{V}_o = \frac{R + 1/j\omega C}{1/j\omega C}\tilde{V}_i = \frac{1}{1 + j\omega RC}\tilde{V}_i}$$

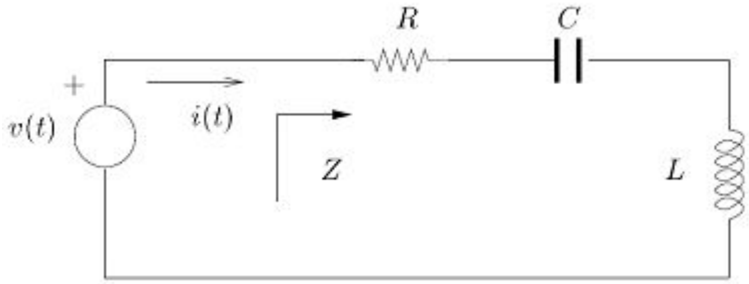
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$



Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Ejemplo 2: Circuito RLC
  - Entrada: *v(t)*
  - Salida: *i(t)*



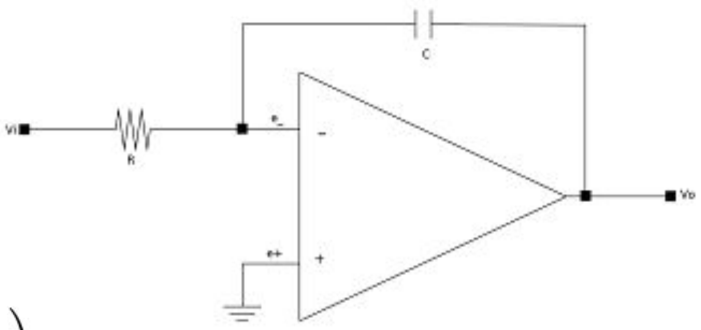
$$H(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{Z(j\omega)}$$

Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Ejemplo 3: Configuración de amplificador
  - Entrada: $v_i(t)$
  - Salida: $v_o(t)$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{-1}{j\omega RC}}$$



$$v_o(t) = Re\left(H(j\omega)V_i(j\omega)e^{j\omega t}\right) = \frac{-1}{RC} Re\left(\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} V_i(j\omega)\right)$$

$$= \frac{-1}{RC} Re\left(\int_0^t V_i(j\omega)e^{j\omega u} du\right) = \frac{-1}{RC}\int_0^t Re\left(V_i(j\omega)e^{j\omega u}\right)du$$

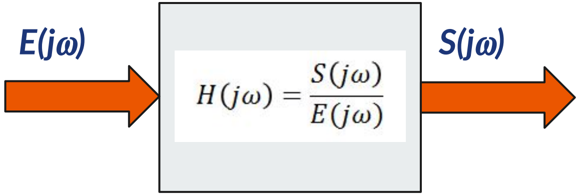
$$= \frac{-1}{RC}\int_0^t v_i(u)du$$

Configuración integrador

Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Notar que la expresión de $H(j\omega)$ es un cociente de polinomios y queda determinada por la naturaleza del circuito.
- Sea una entrada sinusoidal de la forma: $v_i(t)=E_i\cos(\omega t+\varphi_i)$
- La salida en régimen sinusoidal, se puede expresar en función de la transferencia en régimen sinusoidal de la siguiente forma:



$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= Re\left(V_o(j\omega)e^{j\omega t}\right) \\
&= Re\left(H(j\omega)V_i(j\omega)e^{j\omega t}\right) \\
&= Re\left(|H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}E_i e^{j\phi_i}e^{j\omega t}\right) \\
&= Re\left(|H(j\omega)|E_i e^{j(\omega t+\phi_i+\angle H(j\omega))}\right)
\end{aligned}
$$

Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Por lo tanto, la salida en régimen sinusoidal de $v_i(t)=E_i\cos(\omega t+\varphi_i)$ tiene la forma:

$$\boxed{v_o(t) = |H(j\omega)|E_i\cos\big(\omega t + \phi_i + \angle H(j\omega)\big)}$$

- Observación: $H(j\omega)$ determina la salida del circuito en régimen sinusoidal $\forall\omega$!!!
- Por lo tanto, para conocer la respuesta en régimen sinusoidal del circuito para entradas de cualquier frecuencia, basta con conocer la naturaleza de la función de transferencia del circuito.
- En cursos más avanzados verán cómo esto se extienden a un ámplio rango de funciones (Fourier).
- En el tema que viene, veremos cómo visualizarlo gráficamente (Diagramas de Bode)

Circuitos en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Por lo tanto, la salida en régimen sinusoidal de $v_i(t)=E_i\cos(\omega t+\varphi_i)$ tiene la forma:

$$\boxed{v_o(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}\,E_i\cos\big(\omega t + \phi_i + \underbrace{\angle H(j\omega)}\big)}$$

- Como $H(j\omega)$ es una función compleja, esta queda determinada por su módulo y fase.
- La función de transferencia se puede relevar experimentalmente con entradas de distintas frecuencias:
    - $|H(j\omega)|=|A_o|/|A_i|$, donde *A* representa la amplitud de las señales.
    - $\angle H(j\omega) = \varphi_o - \varphi_i$, donde φ es el desfasaje de las señales.

Contenido

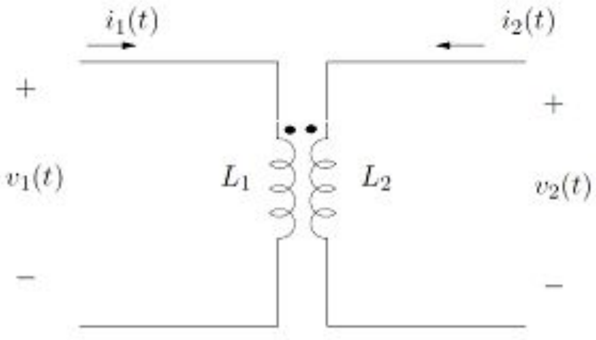
- Circuitos en régimen sinusoidal
- **Transformadores**
- Teorema de Circuitos
- Potencia

Transformadores

Transformador simple

- La relación entre las tensiones y corrientes de ambos lados viene dada por (según la convención de la figura):

$$\begin{cases} v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases} \begin{cases} \tilde{V}_1 = L_1 j\omega\tilde{I}_1 + Mj\omega\tilde{I}_2 \\ \tilde{V}_2 = L_2 j\omega\tilde{I}_2 + Mj\omega\tilde{I}_1 \end{cases}$$



- Se define el coeficiente de acoplamiento al número k que cumple:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

  - Si k = 0, no hay acoplamiento.
  - Si k=1 el acoplamiento es máximo: Transformador perfecto

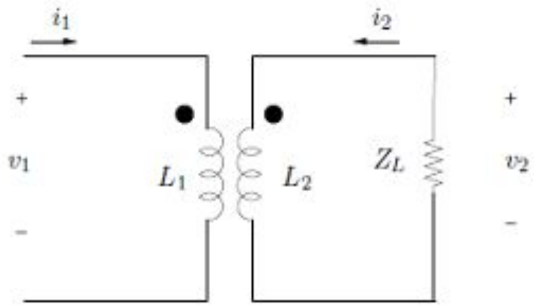
Transformadores

Transformador simple

- Ganancias en tensión y corriente:

$$\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \frac{Z_L.Mj\omega}{[L_1L_2 - M^2](j\omega)^2 + Z_L.L_1j\omega}$$

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = -\frac{M}{L_2}\left[\frac{1}{1 + \frac{Z_L}{L_2j\omega}}\right]$$

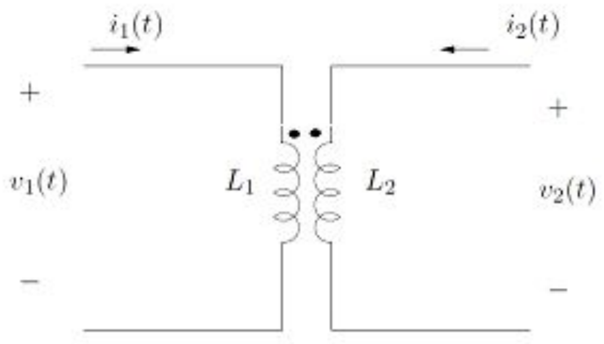


Transformadores

Transformador perfecto

- coeficiente de acoplamiento k=1 ($M = \sqrt{L_1 L_2}$).
- La relación entre las tensiones y corrientes de ambos lados viene dada por (según la convención de la figura):

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{L_1}\left(\sqrt{L1}\frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2}\frac{di_2}{dt}\right) \\ v_2 = \sqrt{L_2}\left(\sqrt{L_2}\frac{di_2}{dt} + \sqrt{L_1}\frac{di_1}{dt}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$



Transformadores

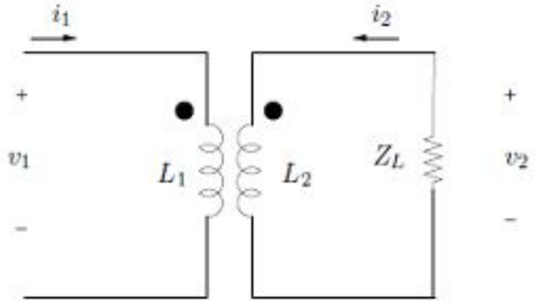
Transformador perfecto

- Ganancias en tensión y corriente:

$$\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

(*n* representa el número de vueltas de cada bobinado)

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\left[\frac{1}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}}\right] = -\frac{n_1}{n_2}\left[\frac{1}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}}\right]$$



- Impedancia vista por el primario:

$$Z_v = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\tilde{V}_2}{\left(-\frac{n_2}{n_1}\right)\left(1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}\right)\tilde{I}_2} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}} Z_L$$

Transformadores

Transformador ideal

- Aproximación $|Z_L| \ll L_2\omega$ (n grande o en altas frecuencias):

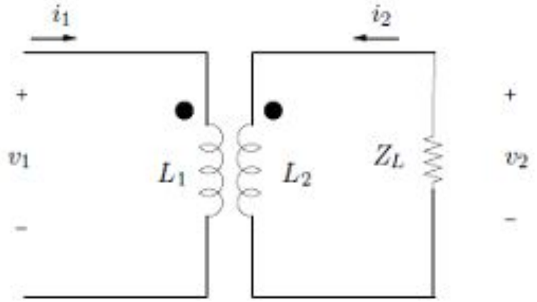
$$1 + \frac{Z_L}{L_2 j\omega} \approx 1$$

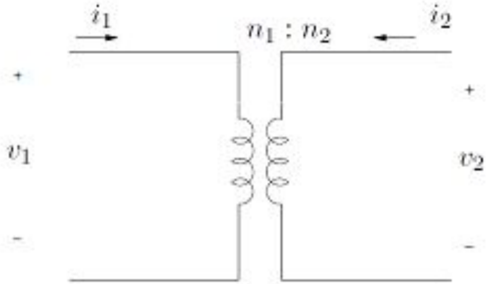
- Ganancias en tensión y corriente:

$$\frac{v_2}{n_2} = \frac{v_1}{n_1} \quad , \quad n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$ (supernudo)

- Impedancia vista por el primario:

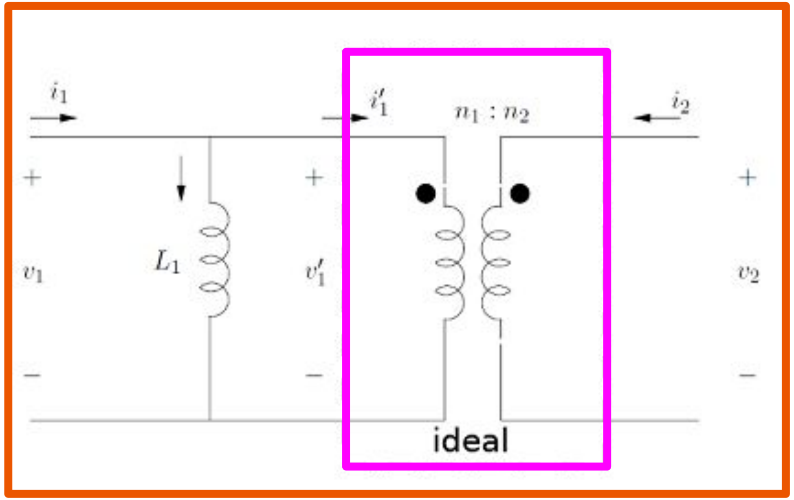
$$Z_v = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L$$



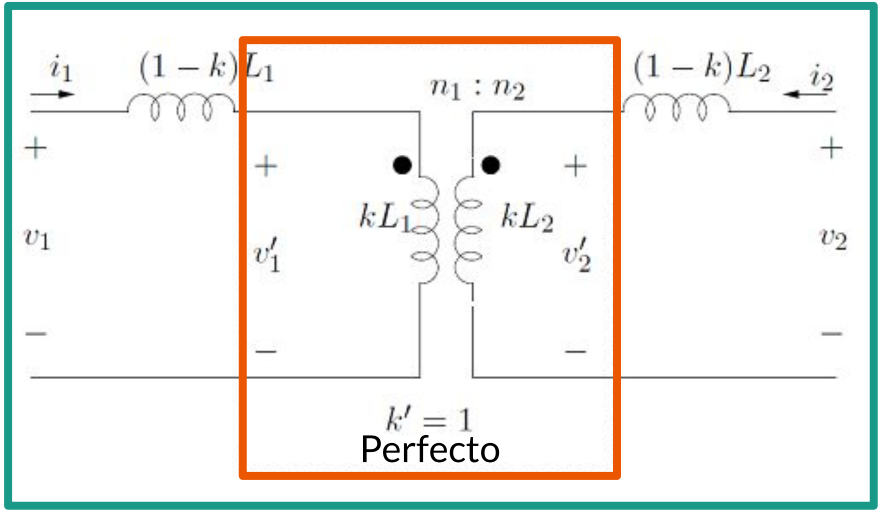


Transformadores

Relación entre distintos modelos de transformadores



Perfecto



Simple

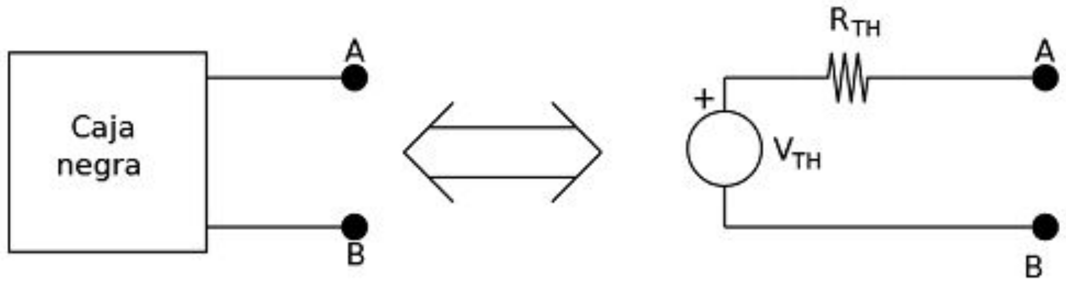
(se pueden agregar resistencias que modelen las pérdidas)

Contenido

- Circuitos en régimen sinusoidal
- Transformadores
- **Teorema de Circuitos**
- Potencia

Teorema de circuitos

Enunciado para circuitos puramente resistivos
Dada una caja negra lineal (sistema lineal), de terminales A y B, puede representarse por el siguiente circuito equivalente:



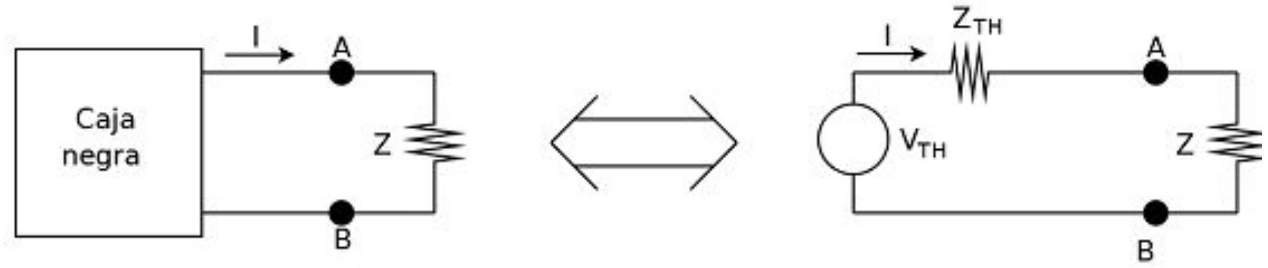
Donde V_{TH} es la tensión de vacío de la caja negra y R_{TH} su resistencia vista.
La condición para que se cumpla el teorema es que no contenga fuentes dependientes de voltajes del exterior.

Teorema de circuitos

Idem con Norton

Enunciado para dominio fasorial

Dada una caja negra lineal (sistema lineal) en régimen sinusoidal, de terminales A y B, puede representarse por el siguiente circuito equivalente:



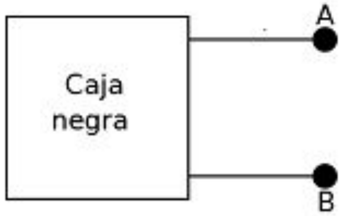
Donde V_{TH} es la tensión de vacío de la caja negra (en fasores) y Z_{TH} su resistencia vista.
La condición para que se cumpla el teorema es que no contenga fuentes dependientes de voltajes del exterior ni que ninguna impedancia interior tenga mutua con el exterior ni la carga conectada.

Teorema de circuitos

Ejemplo

Dada la siguiente caja negra se le realizan los siguientes ensayos:

1. Se conecta R de 5 kOhm y se obtiene $V_1=5(1-j)V$
2. Se conecta un condenzador de impedancia $Z_C=-j3$ kOhm y se obtiene una corriente de $I_2=(4.5-j6)mA$



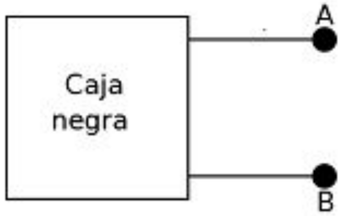
Halle los equivalentes de thévenin y norton

Teorema de circuitos

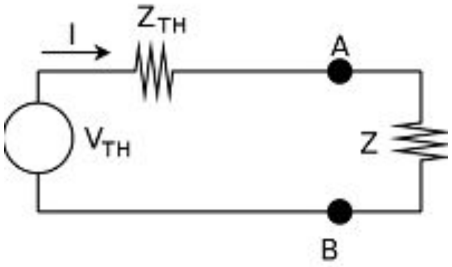
Ejemplo

Datos:

1. Se conecta R de 5 kOhm y se obtiene V_1=5(1-j)V
2. Se conecta un condenzador de impedancia Z_C=-j3 kOhm y se obtiene una corriente de I_2=(4.5-j6)mA



Solución:



$$\begin{cases} V_1 = V_{AB} = \dfrac{R}{R + Z_{Th}} V_{Th} \rightarrow RV_{Th} - Z_{Th} = V_1 R \\ I_2 = \dfrac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_c} \rightarrow V_{Th} - I_2 Z_{Th} = I_2 Z_c \end{cases}$$

Resolver el sistema

Contenido

- Circuitos en régimen sinusoidal
- Transformadores
- Teorema de Circuitos
- **Potencia**

Potencia

Definiciones

Potencia instantanea:

- p(t)=v(t)i(t) (ya la definimos)
- Unidad: Watts

Señal periódica

- Se dice que x(t) es periódica de periodo **τ**, si cumple que:

$$x(t) = x(t + k\tau), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Potencia media:

- si v(t) e i(t) son periódicas de periodo **τ**, la potencia media se define como:

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau p(t)dt$$

Valor eficaz

- sea x(t) periódicas de periodo **τ**, se define su valor eficaz como:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x^2(t)dt}$$

- Esta cantidad cuantifica la energía de la señal

Potencia

Valor eficaz de una sinusoide

Sea $v(t) = E\cos(\omega t+\varphi)$, entonces su valor eficaz se calcula como:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(E\cos(\omega t+\phi))^2 dt} = E\sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(\cos(\omega t+\phi))^2 dt} = E\sqrt{\frac{1}{\tau}\frac{\tau}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

Potencia

Potencia media de una sinusoide

Sean:

$$v(t) = V\cos(\omega t + \phi), i(t) = I\cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{\cos(x).\cos(y) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}$$

Su potencia instantánea se calcula como:

$$p(t) = v(t)i(t) = VI\cos(\omega t + \phi_v)\cos(\omega t + \phi_i) = \frac{VI}{2}[\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) + \cos(\phi_v - \phi_i)]$$

Su potencia media queda:

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{VI}{2}[\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) + \cos(\phi_v - \phi_i)]dt = \frac{VI}{2}\cos\phi\,, \qquad \underline{\phi = \phi_v - \phi_i}$$

En función de los valores eficaces queda:

Factor de potencia

$$\boxed{P = \frac{VI}{2}\cos\phi = V_{eff}I_{eff}\cos\phi}$$

Potencia

Factor de potencia

Sean:

$$v(t) = V\cos(\omega t + \phi), i(t) = I\cos(\omega t + \phi)$$

- Se denomina factor de potencia al coseno del desfasaje entre los fasores de corriente y voltaje de una carga (elemento)
- Notar que este factor es máximo cuando la carga es puramente resistiva y es mínimo cuando es puramente inductiva o capacitiva.
- Notar que ϕ es el mismo desfasaje de la impedancia.

Potencia

Potencia aparente

Extensión a fasores:

$$\boxed{S = V_{eff}\overline{I_{eff}}}$$

- Fasores de corriente y voltaje en valores eficaces
- <u>**ES UN NÚMERO COMPLEJO**</u> (se determina con dos valores, módulo y fase o parte real e imaginaria)
- Unidades: Volt-Ampere (VA)
- Su módulo indica la máxima potencia activa que se puede obtener (OJO en la práctica).

Potencia

Potencia aparente

Relación con la potencia activa:

$$S = V_{eff}\overline{I_{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}}e^{j\phi_v}\frac{I}{\sqrt{2}}e^{-j\phi_i} = \frac{VI}{2}e^{j\phi}$$

- La potencia activa es la parte real de la potencia aparente:

$$\boxed{P = Re(S)}$$

- La potencia reactiva se define como la parte imaginaria de la potencia aparente:

$$\boxed{Q = Im(S) = \frac{VI}{2}\sin(\phi)}$$

- Su unidad es los volt-ampere relativos (VAr)
- Notar que se forma un triángulo pitagórico entre P, Q y S (triángulo de potencias)

Potencia

Potencia reactiva

- La potencia reactiva se define como la parte imaginaria de la potencia aparente:

$$\boxed{Q = Im(S) = \frac{VI}{2}\sin(\phi)}$$

- Para L:

$$Q = im\left(\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}\right) = im\left(\tilde{V}.\overline{\left(\frac{\tilde{V}}{Lj\omega}\right)}\right) = |\tilde{V}|^2.im\left(\frac{1}{-Lj\omega}\right) = \frac{|\tilde{V}|^2}{L\omega}$$

(*consume* reactiva).

- Para C:

$$Q = im\left(\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}\right) = im\left(\tilde{V}.\overline{\left(\tilde{V}Cj\omega\right)}\right) = |\tilde{V}|^2.im\left(-Cj\omega\right) = -|\tilde{V}|^2C\omega$$

(*entrega* reactiva).

Potencia

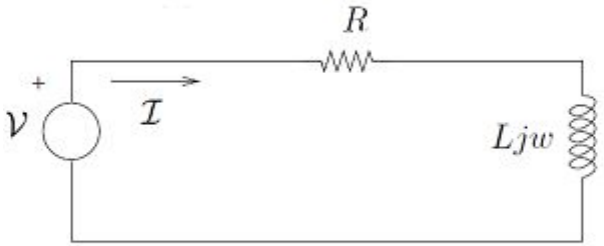
Compensación de reactiva

- Para la fuente, lo ideal es un factor de potencia unitario.
- La entrega de potencia reactiva por parte de la fuente (UTE) puede generar pérdidas en conductores (¡¡¡efecto Joule!!!)
- Es posible colocar una carga antagónica para compensar la reactiva.
- La UTE exige un factor de potencia mínimo de 0.92, por debajo de eso corren multas...

Potencia

Compensación de reactiva - Ejemplo

- Sea el siguiente circuito:



- Su impedancia y corriente en fasores vale:

$$Z = R + j\omega L \rightarrow \mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\angle\frac{\omega L}{R}}$$

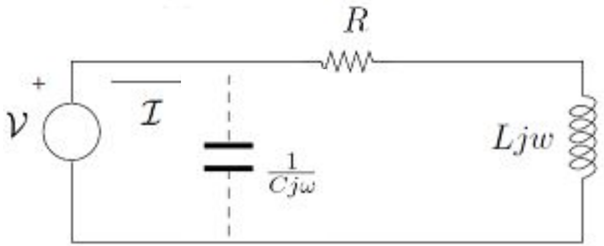
- La potencia reactiva vale:

$$Q = Im(V_{eff}\overline{I_{eff}}) = \frac{|V|^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\angle\frac{\omega L}{R}\right) = \frac{|V|^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L |V|^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Potencia

Compensación de reactiva - Ejemplo

- Sea el siguiente circuito:



- Como el circuito es de tipo inductivo (fase positiva) hay que colocar un capacitor en paralelo a la carga (RL) que cumpla que la suma de la reactiva sea nula, por lo tanto:

$$Q_C = -\frac{\omega L |V|^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- Como Q_C cumple:

$$Q_C = -|V|^2 C\omega$$

$$\boxed{C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}}$$

FIN