Teoría de Circuitos 2022

Régimen sinusoidal

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

Contenido

- Repaso
- Fasores
- Circuitos en régimen sinusoidal

Contenido

- **Repaso**
- Fasores
- Circuitos en régimen sinusoidal

Repaso

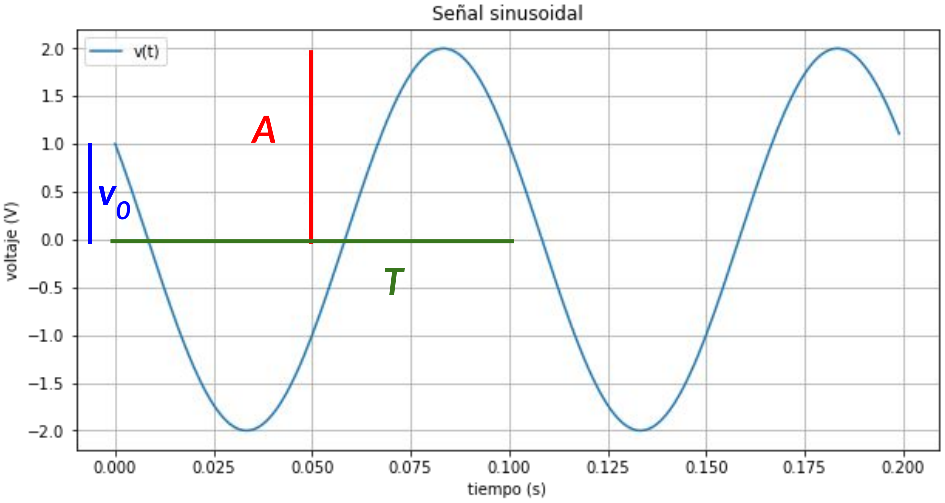
Recordando:

- Una sinusoide tiene la forma:

$$v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

  Donde:

  - A es la amplitud de la señal
  - ϕ es la fase
  - ω es la frecuencia angular de la señal, donde:
    - $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
    - T es el período
    - f = 1/T es la frecuencia



$$v_{i,0} = v_i(0) = A\cos(\phi) \rightarrow \phi = \operatorname{acos}\left(\frac{v_{i,0}}{A}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

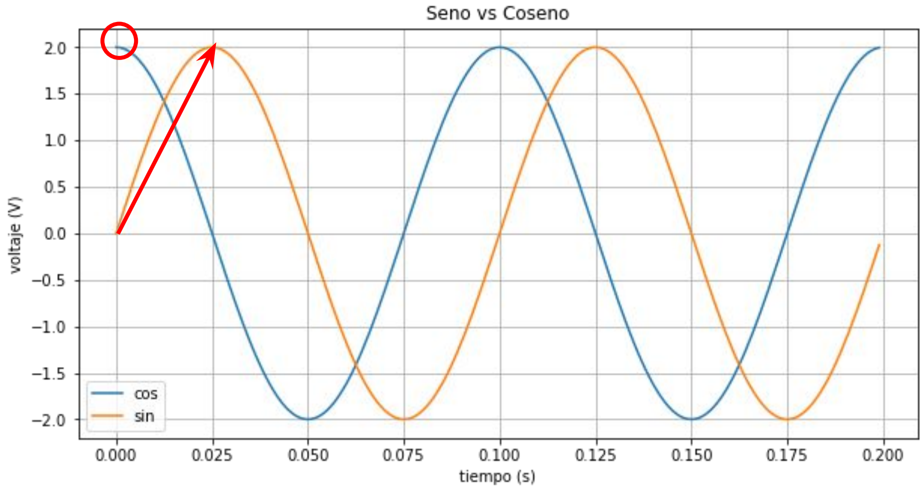
Repaso

Recordando:

- El seno se atrasa π/2 al coseno

$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Es decir, el seno demora π/2ω en llegar al mismo punto del coseno.



Repaso

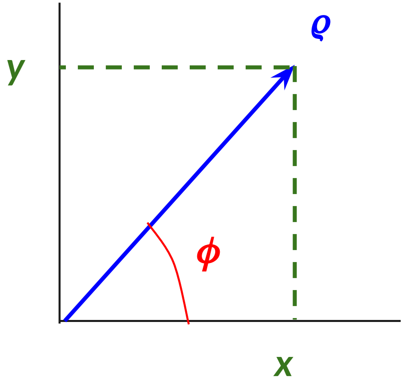
Recordando:

- Dado un vector en $\mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donde:

- ϱ es su módulo
- ϕ es su fase
- x es su proyección sobre el eje horizontal
- y es su proyección sobre el eje vertical



Repaso

Recordando:

- Definición de **atan**

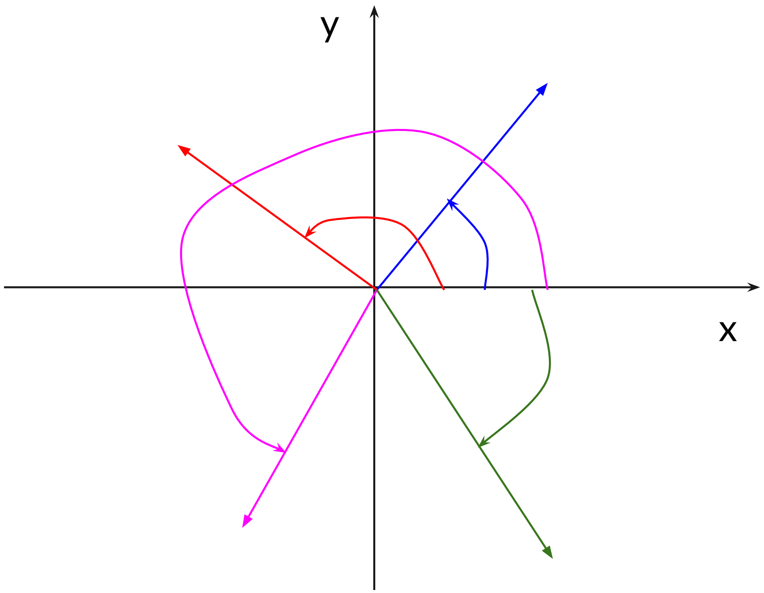
$$atan: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

¿Qué pasa para valores fuera de ese intervalo?

R: Hay que sumar π

- Por lo tanto, la fase se calcula como:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \; si \; x > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \; si \; x < 0 \end{cases}$$

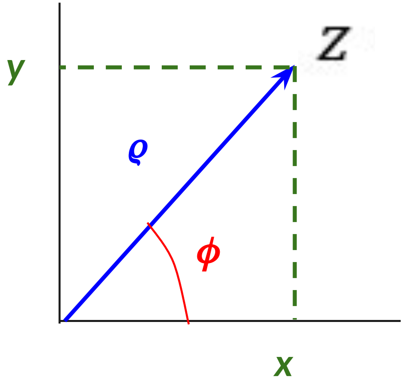


Repaso

Recordando:

- Cada $z \epsilon \mathbb{C}$, puede representarse por un vector en $\mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Donde:

- ϱ = |z| es su módulo
- ϕ = arg(z) es su fase
- x = *Re(z)* es su proyección sobre el eje horizontal
- y = *Im(z)* es su proyección sobre el eje vertical

$$z = x + jy = \rho e^{j\phi} = \rho\angle\phi$$

$$e^{j\phi} = (\cos(\phi) + j\sin(\phi))$$

Contenido

- Repaso
- **Fasores**
- Circuitos en régimen sinusoidal

Fasores

Régimen:

- Dado un sistema lineal, su salida en régimen viene dada por:

$$v_{o,reg}(t) = \lim_{t \to +\infty} v_o(t)$$

- Se dice que se alcanza el régimen si a partir de cierto t_o la señal alcanza cierta periodicidad.
  - Ej. en régimen de continua,
- No siempre se llega al régimen:
  - Para asegurar la llegada al régimen, se debe trabajar con circuitos estables

Fasores

Dado el siguiente circuito RC:

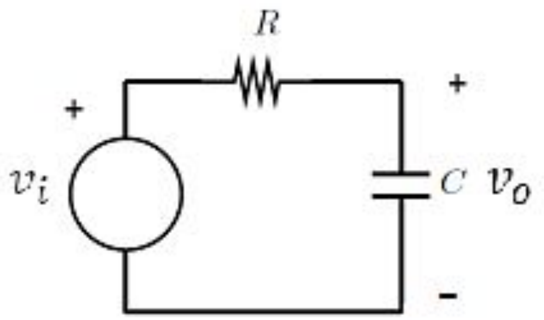
- Encontrar la relación entre v_i y v_o:
- Ecuaciones del circuito:

$$v_i = v_R + v_o$$

$$i = \frac{v_R}{R} = C\frac{dv_o}{dt}$$

- Operando:

$$v_R = RC\frac{dv_o}{dt} \rightarrow \boxed{RC\frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i}$$



Fasores

Dado el siguiente circuito RC:

- Dada una entrada sinusoidal de la forma:

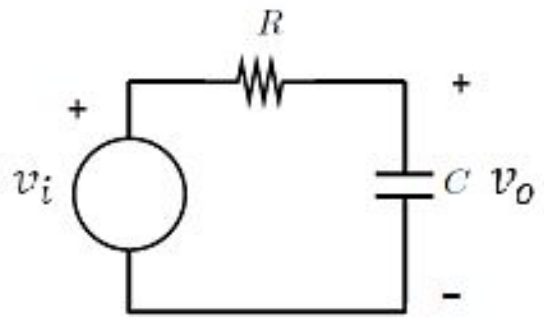
  $$v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

  Hallar v_o:

- La solución homogénea queda::

  $$v_{o,H}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- Calculemos la solución particular:

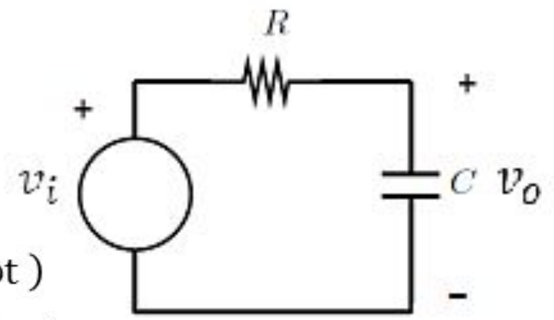


Fasores

Dado el siguiente circuito RC:

- Como la entrada es sinusoidal, la solución particular tiene la forma:

$$v_{o,P}(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$$



- Sustituyendo en la ecuación queda:

$$\omega RC(\alpha \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)) + \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$$

$$= A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\phi)\cos(\omega t) - A\sin(\phi)\sin(\omega t)$$

- Sacando factor común por los términos cos(ωt) y sin(ωt) se llega al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \omega RC\alpha + \beta = A\cos(\phi) \\ -\omega RC\beta + \alpha = -A\sin(\phi) \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolviendo}} v_{o,P}(t) = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos\left(\omega t + \phi - \operatorname{atan}(\omega RC)\right)$$

Fasores

Dado el siguiente circuito RC:

- Por lo tanto, la ecuación general queda:

$$v_{o,G}(t) = \underbrace{Ke^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{Respuesta natural (transitoria)}} + \underbrace{\frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos\left(\omega t + \phi - \operatorname{atan}(\omega RC)\right)}_{\text{Respuesta forzada (régimen)}}$$

- Respuesta natural: Depende únicamente de la constitución del circuito, determina fuertemente la estabilidad del sistema.
- Respuesta forzada: Tiene la forma de la entrada, es la que sobrevive en régimen si este se alcanza.

Fasores

Dado el siguiente circuito RC:

- Por lo tanto, la salida en régimen del circuito queda:

$$\boxed{v_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos\left(\omega t + \phi - \operatorname{atan}(\omega RC)\right) = A_o\cos(\omega t + \phi_o)}$$

- Análogamente, para una entrada de la forma:

$$v_i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

La salida en régimen queda:

$$\boxed{v_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin\left(\omega t + \phi - \operatorname{atan}(\omega RC)\right) = A_o\sin(\omega t + \phi_o)}$$

Fasores

Generalizando

- Si la entrada tiene la forma:

$$v_{i,1}(t) = V_i \cos(\omega t + \phi_i) \Rightarrow$$

Su salida en régimen tiene la forma:

$$v_{o,1}(t) = V_o \cos(\omega t + \phi_o)$$

- Si cambiamos seno por coseno, módulo y fase de salida permanecen invariantes:

$$v_{i,2}(t) = V_i \sin(\omega t + \phi_i) \Rightarrow v_{o,2}(t) = V_o \sin(\omega t + \phi_o)$$

Recordando que un circuito lineal cumple: **S**(a.e_1+b.e_2) = a.**S**(e_1)+b.**S**(e_2), ∀ e_1, e_2 señales y a,b ϵ ℝ

Se tiene que:

$$\boxed{S\big(V_i(a\cos(\omega t + \phi_i) + b\sin(\omega t + \phi_i))\big) = V_o(a\cos(\omega t + \phi_o) + b\sin(\omega t + \phi_o))}$$

¿Qué pasa si extendemos en rango de los escalares al mundo complejo?

Fasores

Generalizando

- Para a=1 y b= j, se tiene que:

$$V_i(\cos(\omega t + \phi_i) + j\sin(\omega t + \phi_i)) = V_i e^{j(\omega t + \phi_i)}$$
$$V_o(\cos(\omega t + \phi_o) + j\sin(\omega t + \phi_o)) = V_o e^{j(\omega t + \phi_o)}$$

- Por lo tanto, la relación de un sistema lineal extendida a números complejos queda:

$$\boxed{S(V_i e^{j(\omega t + \phi_i)}) = V_o e^{j(\omega t + \phi_o)}}$$

- Notar que se cumple que:

$$v_{o,1}(t) = Re\left(V_o e^{j(\omega t + \phi_o)}\right) = Re\left(S\left(V_i e^{j(\omega t + \phi_i)}\right)\right) = S\left(v_{i,1}(t)\right) = S\left(Re\left(V_i e^{j(\omega t + \phi_i)}\right)\right)$$

En conclusión, para resolver un problema en régimen sinusoidal, se puede simplificar el problema pasando al mundo complejo.

¡Qué irónico!

Fasores

Definición

- Dada la función sinusoidal de la forma:

$$x(t) = X_o \cos(\omega t + \phi)$$

- Se define fasor como el número complejo $\tilde{X}$ que verifica la identidad:

$$x(t) = Re\left(\tilde{X} e^{j\omega t}\right) \longrightarrow \boxed{\tilde{X} = X_o e^{j\phi}}$$

- Notar que se puede despejar aplicando el siguiente procedimiento:

$$x(t) = X_o \cos(\omega t + \phi) = Re\left(X_o e^{j(\omega t + \phi)}\right) = Re\left(\mathbf{X_o e^{j\phi}} e^{j\omega t}\right)$$

- Siguiendo esto, la relación de un sistema en régimen sinusoidal queda::

$$v_{o,1}(t) = Re\left(\widetilde{V_o} e^{j\omega t}\right) = S\left(Re\left(\widetilde{V_i} e^{j\omega t}\right)\right) = S\left(v_{i,1}(t)\right), \text{con } \widetilde{V_i} = V_i e^{j\phi_i} \text{ y } \widetilde{V_o} = V_o e^{j\phi_o}$$

Notar que el fasor no depende del tiempo, sí puede depender de la frecuencia angular como veremos más adelante.

Contenido

- Repaso
- Fasores
- **Circuitos en régimen sinusoidal**

Circuitos en régimen sinusoidal

Metodología

- Como ya se vió, en régimen sinusoidal se cumple que:

$$v_o(t) = Re\left(\tilde{V}_o e^{j\omega t}\right) = S\left(Re\left(\tilde{V}_i e^{j\omega t}\right)\right) = S(v_i(t))$$

- Por lo tanto, se sugiere el siguiente plan para trabajar con circuitos en régimen sinusoidal:
    1. Calcular el fasor asociado a v_i
    2. Resolver el circuito en el dominio fasorial
    3. Obtener v_o a partir de su fasor asociado

Para determinar lo que es trabajar en el dominio fasorial, hay que determinar cómo se comportan los componentes lineales que conocemos en este mundo.

Circuitos en régimen sinusoidal

Resistencia

- La ley de Ohm nos dice que:

$$v(t) = Ri(t)$$

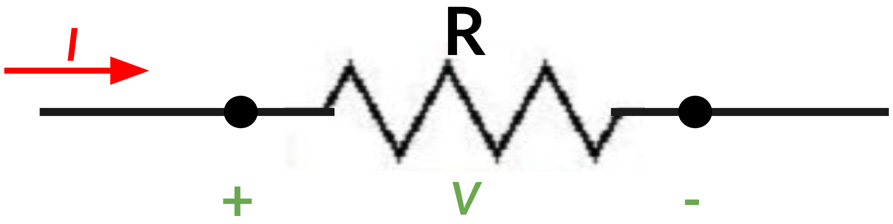
- Pasando a fasores:

$$v(t) = Re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right) = R\,Re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = Re\left(R\tilde{I}e^{j\omega t}\right)$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{\tilde{V} = R\tilde{I}}$$

La ley de ohm es invariante en fasores



Resistencia

V e I están en fase

Circuitos en régimen sinusoidal

Capacitancia

- La ley de del elemento nos dice que:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

- Pasando a fasores:

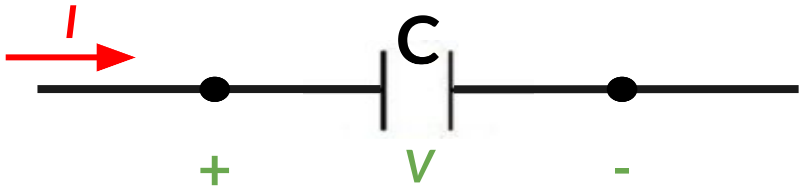
$$i(t) = Re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right)$$

$$C\frac{dv}{dt} = C\frac{d}{dt}Re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right) = Re\left(C\tilde{V}\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = Re\left(j\omega C\tilde{V}e^{j\omega t}\right)$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}}$$

Se cumple la ley de ohm en el dominio fasorial para C



I está adelantada π/2 respecto a V

Circuitos en régimen sinusoidal

Inductancia

- La ley de del elemento nos dice que:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

- De forma simétrica al caso anterior:

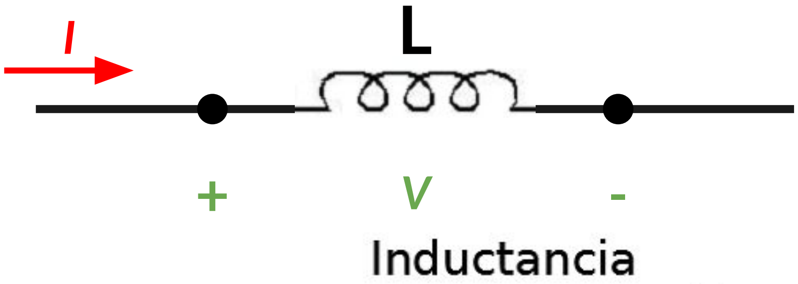
$$v(t) = Re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right)$$

$$L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}Re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = Re\left(L\tilde{I}\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = Re\left(j\omega L\tilde{I}e^{j\omega t}\right)$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{\tilde{V} = j\omega L\tilde{I}}$$

También se cumple la ley de ohm en el dominio fasorial para L



I está atrasada π/2 respecto a V

Circuitos en régimen sinusoidal

Leyes de mallas y nudos

- Por linealidad de la función Re(), se siguen cumpliendo.

Fuentes

- Notar que las fuentes sinusoidales pasan a ser fuentes de continua en fasores.

Circuitos en régimen sinusoidal

Circuito RC en fasores

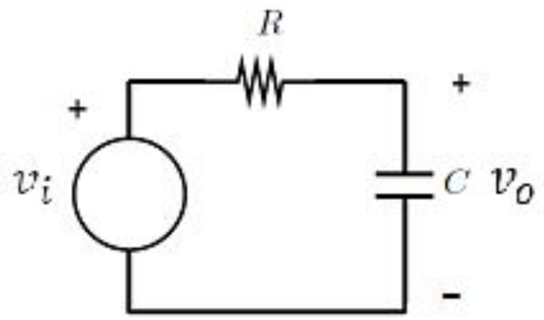
- Resolver el siguiente circuito en fasores:

$$v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

1. Pasar la entrada v_i a fasores.

$$v_i(t) = Re\left(Ae^{j(\omega t+\phi)}\right) = Re\left(Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\right)$$

$$\boxed{\tilde{V}_i = Ae^{j\phi}}$$



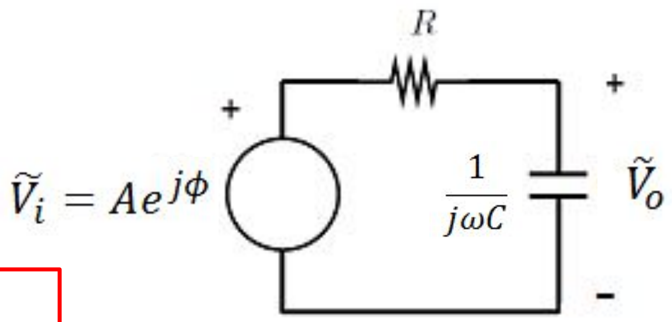
Circuitos en régimen sinusoidal

Circuito RC en fasores

- Resolver el siguiente circuito en fasores:

$$v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

2. Resolver el circuito a fasores



$$\boxed{\tilde{V}_o = \frac{R + 1/j\omega C}{1/j\omega C}\tilde{V}_i = \frac{1}{1 + j\omega RC}\tilde{V}_i}$$

por divisor de tensión

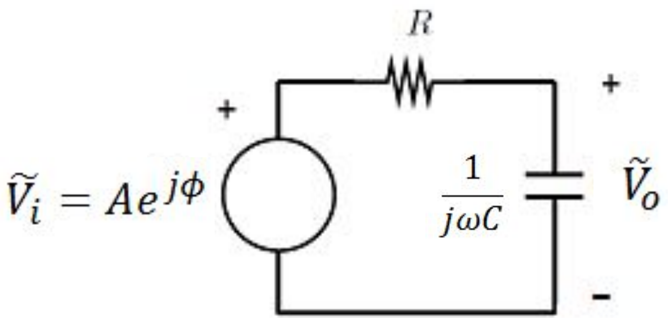
Circuitos en régimen sinusoidal

Circuito RC en fasores

- Resolver el siguiente circuito en fasores:

$$v_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

3. Pasar el fasor de salida a tiempo



$$\boxed{v_o(t) = Re\left(\tilde{V}_o e^{j\omega t}\right) = Re\left(\frac{1}{1+j\omega RC}\tilde{V}_i e^{j\omega t}\right) = Re\left(\frac{A}{1+j\omega RC}e^{j(\omega t+\phi)}\right)}$$

Ejercicio: Terminar de resolver la expresión.

FIN