4.4. Polinomios y series de Taylor

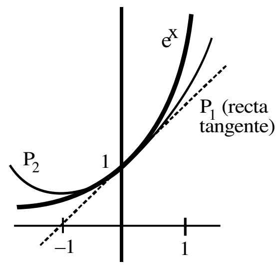
¿Cómo hallar, sin calculadora, $\sqrt{e}$, $\log 2$ ó $\operatorname{sen} 1$? Las funciones más fáciles de evaluar son los polinomios. Si encontramos un polinomio P que se parezca mucho a una función f dada cerca de un punto a (y podemos estimar el error cometido al sustituir f por P), podremos hallar valores aproximados de $f(x)$ para los x próximos a a .

Ej. Sea $f(x)=e^x$. El polinomio de grado 1 más parecido a f cerca de $x=0$ es la recta tangente: $P_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$.

Observemos que satisface: $P_1(0)=f(0)$; $P_1'(0)=f'(0)$.

Probablemente se parecerá más a e^x el polinomio P_2 de grado 2 que cumpla $P_2(0)=f(0)$; $P_2'(0)=f'(0)$; $P_2''(0)=f''(0)$, o sea,

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{f''(0)}{2}x^2=1+x+\tfrac{1}{2}x^2 .$$

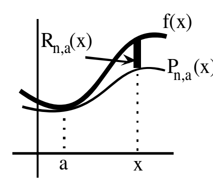


En general, **el P_n que mejor aproximará a una función f cerca de $x=a$ será el que coincida con f y con sus n primeras derivadas en** a . Se comprueba fácilmente que:

Def. Si f tiene n derivadas en a , el polinomio, de grado $\leq n$,

$$P_{n,a}(x)=f(a)+f'(a)[x-a]+\tfrac{f''(a)}{2!}[x-a]^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}[x-a]^n$$

cumple $P_{n,a}^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, para $k=0,..,n$. Al $P_{n,a}$ se le llama **polinomio de Taylor** de f de grado n en a . Se llama $R_{n,a}(x)$, **resto** del polinomio de Taylor, al **error** cometido para cada x al sustituir $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$, es decir, $f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$.



Es esperable que el $R_{n,a}(x)$ sea pequeño si x es cercano a a y que disminuya al aumentar n . La siguiente expresión del resto, a pesar de venir en función de un c desconocido, nos va a permitir acotar este error en muchas ocasiones:

Teorema (forma de Lagrange del resto):

Si f, f', ... , $f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$ (ó en $[x,a]$) entonces
$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}[x-a]^{n+1}$ para algún $c\in(a,x)$ si $x>a$ [ó $c\in(x,a)$ si $x<a$].

[Otras expresiones del resto son útiles, pero se necesitan las integrales. Observemos que si f es un polinomio de grado n se deduce $R_{n,a}=0$, es decir, que, como debía suceder, el polinomio coincide con su polinomio de Taylor de grado n].

Para cada $t\in(a,x)$ tenemos que $f(x)=f(t)+f'(t)[x-t]+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}[x-t]^n+R_{n,t}(x)$.

Miremos el resto como función de t para x fijo: $S(t)=R_{n,t}(x)$. Derivando respecto a t :

$$0=f'(t)+(-f'(t)+f''(t)[x-t])+\big(-f''(t)[x-t]+\tfrac{f'''(t)}{2!}[x-t]^2\big)$$
$$+\cdots+\big(-\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}[x-t]^{n-1}+\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n\big)+S'(t) \;\Rightarrow\; S'(t)=-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n$$

El TVM de Cauchy en $[a,x]$ para $S(t)$ y $g(t)=[x-t]^{n+1}$ implica que $\exists c\in(a,x)$ tal que

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{S'(c)}{g'(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\frac{[x-c]^n}{[x-c]^n}\frac{1}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Como $S(x)=R_{n,x}(x)=0$, $S(a)=R_{n,a}(x)$, $g(x)=0$, $g(a)=[x-a]^{n+1}$ se tiene el resultado.

[Igual si $x<a$].

Normalmente hallaremos los polinomios para $a=0$. En ese caso no escribiremos las a de los subíndices y las expresiones anteriores adoptan la forma (fórmula de **McLaurin**):

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ existen en $[0,x]$ [ó $[x,0]$] entonces para algún $c\in(0,x)$ [ó $c\in(x,0)$]

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Hallando las derivadas se obtienen fácilmente los siguientes polinomios y restos:

$$e^x=1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+R_n(x) \text{ con } R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen}x=x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x) \text{ con } R_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$\cos x=1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}-\tfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x) \text{ con } R_{2n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

[Para $\operatorname{sen}x$, como la derivada $\operatorname{sen}^{(2n+2)}(0)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen}0=0$, es $P_{2n+1}\equiv P_{2n+2}$; por eso en su resto aparecen $2n+3$ y no $2n+2$; y algo muy parecido sucede con el $\cos x$].

Dado un x, hay en los tres casos cotas fáciles para el resto en términos de cosas conocidas:

$$\text{para } e^x: \text{ si } x>0, \text{ es } |R_n(x)|\le\frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ; \text{ si } x<0, \text{ es } |R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ;$$

$$\text{para } \operatorname{sen}x,\ |R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\ \forall x;\ \text{ para } \cos x,\ |R_{2n}(x)|\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \forall x.$$

Como probamos en 4.1, una sucesión de la forma $|x|^k/k!\to 0\ \forall x$ cuando $k\to\infty$. Por tanto, **podemos aproximar para cualquier x el valor de e^x, $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ con la precisión que queramos utilizando un polinomio de Taylor con n suficientemente grande** (aunque habrá que tomar un n mayor cuanto más lejano de 0 esté el x).

El $\log x$ no está ni definido en $x=0$. Por eso lo que se desarrolla es el $\log(1+x)$. Es fácil ver que la derivada n-sima de esta función es $[-1]^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por tanto

$$\log(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\cdots+[-1]^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+R_n(x) \text{ con } R_n(x)=\frac{[-1]^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

Se puede probar además (no con esta expresión del resto) que **los polinomios del $\log(1+x)$ sólo aproximan a la función si $-1<x\le 1$.**

Ej. Calculemos con error menor que 10^{-5} el $\operatorname{sen}1$.

$|R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\Rightarrow|R_{2n+1}(1)|\le\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{10000}$ si $2n+3\ge 9\Rightarrow$

$\operatorname{sen}1\approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}\approx 0.84147$ con error $|R_7(1)|\le\frac{1}{9!}<10^{-5}$.

Ej. Si aproximamos $\operatorname{sen}2$ con este mismo $P_7(x)$ el error será mayor:

$\operatorname{sen}2\approx 2-\frac{8}{6}+\frac{32}{120}-\frac{128}{5040}\approx 0.9079$; $|R_7(2)|\le\frac{2^9}{9!}=\frac{4}{2835}\approx 0.0014$.

(Estas cotas pronto serán más fáciles con las series de Taylor).

n	n!	2^n
2	2	4
3	6	8
4	24	16
5	120	32
6	720	64
7	5040	128
8	40320	256
9	362880	512
10	3628800	1024

Ej. Hallemos ahora $\log\frac{4}{5}=\log(1-\frac{1}{5})$ con error $<10^{-3}$.

Como $\left|R_n(-\frac{1}{5})\right|=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(1+c)^{n+1}}\underset{-1/5<c<0}{<}\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(4/5)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}<\frac{1}{1000}$ si $n\ge 3$,

debemos usar el polinomio de grado 3: $\log\frac{4}{5}\approx-\frac{1}{4}-\frac{1}{50}-\frac{1}{375}\approx -0.224$ con error $<10^{-3}$.

De otra forma (que evitará la acotación del resto en cuanto tengamos las series de Taylor):

$\log\frac{4}{5}=-\log(1+\frac{1}{4})\approx-\frac{1}{5}+\frac{1}{32}-\frac{1}{192}\approx -0.223$, con $\left|R_3(\frac{1}{4})\right|=\frac{1}{4\cdot4^4(1+c)^4}\underset{0<c<1/4}{<}\frac{1}{4^5}<\frac{1}{1000}$.