



SERIES (1)

Análisis 1
2017

Prof. Gustavo Franco



Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n) , considera (S_n) tal que $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$.

Clasifica (a_n) y (S_n) en convergente, divergente u oscilante, calculando previamente S_n .

(1) $(a_n) : a_n = n$ (2) $(a_n) : a_n = 1$

(3) $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ (4) $(a_n) : a_n = (-1)^n$

(5) $(a_n) : a_n = L(n+2) - L(n+1)$

(6) $(a_n) : a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (7) $(a_n) : a_n = (-2)^n$

DEFINICIÓN

Consideremos las sucesiones (a_n) y $(S_n) : S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$.

Al par ordenado $((a_n), (S_n))$, lo denominaremos *serie numérica* o *serie de término general* (a_n) y la notaremos $\sum a_n$.

Llamaremos *reducida n-ésima* de la serie al término general de la sucesión (S_n) .

Observación

Si $a_n \geq 0 \Rightarrow (S_n) \uparrow$

Si $a_n \leq 0 \Rightarrow (S_n) \downarrow$

Según el comportamiento de (S_n) diremos que:

- si $S_n \rightarrow s$ ($s \in \mathbb{R}$), la serie *converge* y su suma es s ,
y escribiremos $\sum a_n$ C y $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s$.
- si $S_n \rightarrow \infty$, la serie *diverge* y notamos $\sum a_n$ D.
- si (S_n) oscila, la serie *oscila* y notamos $\sum a_n$ O.




Clasifica las series de término general (a_n) , para cada sucesión (a_n) de la actividad anterior.

Terminología

Diremos que dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ *son de la misma clase* o que *tienen el mismo carácter* si son ambas convergentes, ambas divergentes o ambas oscilantes.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ *son de la misma clase*, notaremos: $\sum a_n \leftrightarrow \sum b_n$

 Por definición, es posible escribir S_n en función de a_n , ahora bien, ¿es posible escribir a_n en función de S_n ?

SERIE GEOMÉTRICA

Llamaremos *serie geométrica* a toda serie de término general $(a_n) : a_n = q^n$, con $q \in \mathbb{R}$.

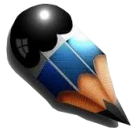


Clasifica, discutiendo según q , la serie $\sum q^n$.

Clasificación de la Serie Geométrica

SERIE TELESCÓPICA

Diremos que una serie de término general (a_n) es *telescópica* si existe una sucesión (b_n) tal que

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$


Calcula S_n y clasifica $\sum a_n$, discutiendo según (b_n) .

NOTA

Consideremos

las sucesiones (A_n) y (C_n) : $C_n = A_{n+p}$ ($p \in \mathbb{N}$) y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1) A_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow C_n \rightarrow \alpha$$

$$(2) A_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow C_n \rightarrow \infty$$

$$(3) (A_n) \text{ oscila} \Leftrightarrow (C_n) \text{ oscila}$$



Consideremos las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tal que $b_n = a_{n+p}$, con $p \in \mathbb{N}$.

((b_n) surge de eliminar p términos consecutivos en la sucesión (a_n) .)

(1) Prueba que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase.

(2) En caso de que sean convergentes, ¿suman lo mismo?



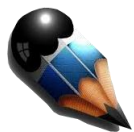
Completa y demuestra:

$$\sum a_n \text{ C} \wedge \sum b_n \text{ C} \Rightarrow \begin{cases} \sum (a_n + b_n) \dots\dots\dots \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\sum a_n \text{ C} \wedge \sum b_n \text{ D} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) \dots\dots\dots$$

Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $\sum a_n$ y $\sum \alpha a_n \dots\dots\dots$

$$\text{Consideremos } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \sum a_n \text{ C} \wedge \sum b_n \text{ C} \Rightarrow \begin{cases} \sum (\alpha a_n + \beta b_n) \dots\dots\dots \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \dots\dots\dots \end{cases}$$



Clasifica las siguientes series y en caso de ser convergentes

calcula las sumas $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ y $\sum_{i=4}^{+\infty} a_i$.

(a) $\sum \frac{1}{6^n}$ (b) $\sum \frac{1}{4^{n+2}}$ (c) $\sum \frac{-3}{2^n}$ (d) $\sum \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

(e) $\sum \frac{(-1)^n}{3^n}$ (f) $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (g) $\sum \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(h) $\sum L \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$ (i) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$



¿Qué particularidad tiene (a_n) cuando $\sum a_n \in \mathbb{C}$?

TEOREMA

C.N. PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE

$$\sum a_n \text{ C} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$



Demuestra (Sug.: escribe a_n en función de S_n .)

TEOREMA: CONDICIÓN DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE

$$\sum a_n \text{ C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, \left| a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$



Consideremos la serie convergente $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- (1) Hallar el n_ε , correspondiente al teorema anterior, cuando $\varepsilon = 0,1$ y $p = 3$.
- (2) Hallar el n_ε , correspondiente al teorema anterior, cuando $\varepsilon = 0,1$ y $p = 51$.

SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Son las series generadas por un sucesión cuyos términos son mayores o iguales que cero a partir de un cierto natural. Por ejemplo: $\sum (n - 10)$



Teorema

Consideremos (a_n) .

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \geq 0 \Rightarrow \sum a_n$ no oscila
(converge o diverge).

UN PARÉNTESIS: MEDIAS PITAGÓRICAS

En su constante búsqueda de proporciones entre números enteros o entre segmentos, los pitagóricos se fijaron en ciertos valores intermedios que quizás pudieran explicar por qué ciertos acordes sonaban bien y otros mal. Los llamaron *medias* o *promedios*. En general, dados dos números a y b (o dos segmentos de longitudes a y b), una *media* entre ellos es un tercer número (o segmento) que forma con ellos una cierta proporción, considerada atractiva o interesante. Las más importantes son:

la *media aritmética*, que es el número A tal que $A - a = b - A$; la *media geométrica* o *proporcional*, el número G tal que $a / G = G / b$, y *media armónica*, el número H tal que $(a - H) / (H - b) = a / b$.

En la actualidad definimos estas medias mediante fórmulas directas bien conocidas...

$$A = \frac{a + b}{2} \quad G = \sqrt{ab} \quad H = \frac{2ab}{a + b}$$

Moreno Castillo, R. y Vegas Montaner, J. M. (2006). *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivola.

SERIE ARMÓNICA



Considera la sucesión real: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : a_n = \frac{1}{n}$

Comprueba que cada término es media armónica entre el término anterior y el que le sigue.

Definición

Llamaremos *serie armónica* a la serie: $\sum \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$

LA SERIE ARMÓNICA DIVERGE

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

dos términos
cuatro términos
ocho términos
 2^{n-1} términos

cada uno $\geq \frac{1}{4}$
cada uno $\geq \frac{1}{8}$
cada uno $\geq \frac{1}{16}$
cada uno $\geq \frac{1}{2^n}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Entonces: } S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} n \\ \lim \left(1 + \frac{1}{2} n \right) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim S_{2^n} = +\infty \Rightarrow \lim S_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ D}$$

$(S_n) \uparrow$



¿Es verdadero el recíproco de la condición necesaria de convergencia?



Completa y demuestra:

Teorema : Criterio de comparación

(H) Consideremos dos sucesiones reales (a_n) y (b_n) ,
que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$

(T) Si $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum a_n$

Si $\sum a_n$ D $\Rightarrow \sum b_n$



Clasifica:

(1) $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ (Sug.: ten en cuenta la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.)

(2) $\sum \frac{1}{n-10}$

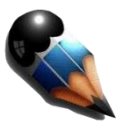


Teorema : Criterio de comparación por paso al límite

(H) Consideremos dos sucesiones reales (a_n) y (b_n) de términos no negativos.

$$(T) \text{ Si } \lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty \wedge \sum b_n \text{ D} \Rightarrow \sum a_n \text{ D}$$

$$\text{Si } \lim \frac{a_n}{b_n} = 0^+ \wedge \sum b_n \text{ C} \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$$



Teorema

(H) Consideremos dos sucesiones reales (a_n) y (b_n) ,
 que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$,
 y que $\exists p, q \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, p < \frac{a_n}{b_n} < q$

(T) $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase.



Completa y demuestra:

(H) Consideremos dos sucesiones reales (a_n) y (b_n) ,
 que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$$

(T)



En particular si $(a_n) \sim (b_n)$, entonces.....

BIBLIOGRAFÍA

Moreno Castillo, R. y Vegas Montaner, J. M. (2006). *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivola.

Rey, M. (2012). *Fichas para el curso de Análisis 1*.