# Series (1)

Análisis 1

2017



Prof. Gustavo Franco

Para cada una de las siguientes sucesiones $\left(a_n\right)$, considera $\left(S_n\right)$ tal que $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$.

Clasifica $\left(a_n\right)$ y $\left(S_n\right)$ en convergente, divergente u oscilante, calculando previamente $S_n$.

**(1)** $\left(a_n\right): a_n = n$ **(2)** $\left(a_n\right): a_n = 1$

**(3)** $\left(a_n\right): a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ **(4)** $\left(a_n\right): a_n = \left(-1\right)^n$

**(5)** $\left(a_n\right): a_n = \mathrm{L}\left(n+2\right) - \mathrm{L}\left(n+1\right)$

**(6)** $\left(a_n\right): a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(7)** $\left(a_n\right): a_n = \left(-2\right)^n$

# DEFINICIÓN

Consideremos las sucesiones $\left(a_n\right)$ y $\left(S_n\right): S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$.

Al par ordenado $\left(\left(a_n\right),\left(S_n\right)\right)$, lo denominaremos *serie numérica* o *serie de término general* $\left(a_n\right)$ y la notaremos $\sum a_n$.

Llamaremos *reducida n-ésima* de la serie al término general de la sucesión $\left(S_n\right)$.

**Observación**

Si $a_n \geq 0 \Rightarrow \left(S_n\right) \uparrow$

Si $a_n \leq 0 \Rightarrow \left(S_n\right) \downarrow$

Según el comportamiento de $\left(S_n\right)$ diremos que:

- si $S_n \to s \ \left(s \in \mathbb{R}\right)$, la serie *converge* y su suma es $s$, y escribiremos $\sum a_n$ C y $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s$ .
- si $S_n \to \infty$, la serie *diverge* y notamos $\sum a_n$ D.
- si $\left(S_n\right)$ oscila, la serie *oscila* y notamos $\sum a_n$ O.

Clasifica las series de término general $\left(a_n\right)$, para cada sucesión $\left(a_n\right)$ de la actividad anterior.

**Terminología**

Diremos que dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ *son de la misma clase* o que *tienen el mismo carácter* si son ambas convergentes, ambas divergentes o ambas oscilantes.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ *son de la misma clase*, notaremos: $\sum a_n \leftrightarrow \sum b_n$

Por definición, es posible escribir $S_n$ en función de $a_n$, ahora bien, ¿es posible escribir $a_n$ en función de $S_n$ ?

# Serie geométrica

Llamaremos *serie geométrica* a toda serie de término general $\left(a_n\right): a_n = q^n$, con $q \in \mathbb{R}$.

Clasifica, discutiendo según $q$, la serie $\sum q^n$ .

Clasificación de la Serie Geométrica

# Serie telescópica

Diremos que una serie de término general $\left(a_n\right)$ es *telescópica* si existe una sucesión $\left(b_n\right)$ tal que

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Calcula $S_n$ y clasifica $\sum a_n$, discutiendo según $\left(b_n\right)$.

## NOTA

Consideremos

las sucesiones $\left(A_n\right)$ y $\left(C_n\right): C_n = A_{n+p}$ $\left(p \in \mathbb{N}\right)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) $A_n \to \alpha \iff C_n \to \alpha$

(2) $A_n \to \infty \iff C_n \to \infty$

(3) $\left(A_n\right)$ oscila $\iff$ $\left(C_n\right)$ oscila

Consideremos las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tal que $b_n = a_{n+p}$, con $p \in \mathbb{N}$.

($(b_n)$ surge de eliminar $p$ términos consecutivos en la sucesión $(a_n)$.)

**(1)** Prueba que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase.

**(2)** En caso de que sean convergentes, ¿suman lo mismo?

Hipervínculo

## Completa y demuestra:

$$\sum a_n \ \mathrm{C} \ \wedge \ \sum b_n \ \mathrm{C} \Rightarrow \begin{cases} \sum \left(a_n + b_n\right) \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + b_n\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\sum a_n \ \mathrm{C} \ \wedge \ \sum b_n \ \mathrm{D} \Rightarrow \sum \left(a_n + b_n\right) \ldots\ldots\ldots$$

Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $\sum a_n$ y $\sum \alpha a_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Consideremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\sum a_n \ \mathrm{C} \ \wedge \ \sum b_n \ \mathrm{C} \Rightarrow \begin{cases} \sum \left(\alpha a_n + \beta b_n\right) \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Clasifica las siguientes series y en caso de ser convergentes calcula las sumas $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ y $\sum_{i=4}^{+\infty} a_i$.

**(a)** $\sum \frac{1}{6^n}$ **(b)** $\sum \frac{1}{4^{n+2}}$ **(c)** $\sum \frac{-3}{2^n}$ **(d)** $\sum \frac{2^n+3^n}{6^n}$

**(e)** $\sum \frac{\left(-1\right)^n}{3^n}$ **(f)** $\sum \frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$ **(g)** $\sum \frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}$

**(h)** $\sum \mathrm{L}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ **(i)** $\sum \frac{1}{n\left(n+2\right)}$

¿Qué particularidad tiene $\left(a_n\right)$ cuando $\sum a_n$ C?

# Teorema
# C.N. para la convergencia de una serie

$$\sum a_n \ \mathrm{C} \ \Rightarrow \ a_n \to 0$$

Demuestra (Sug.: escribe $a_n$ en función de $S_n$.)

# TEOREMA: CONDICIÓN DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE

$$\sum a_n \ \mathrm{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, \left| a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Consideremos la serie convergente $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**(1)** Hallar el $n_\varepsilon$, correspondiente al teorema anterior, cuando $\varepsilon = 0{,}1$ y $p = 3$.

**(2)** Hallar el $n_\varepsilon$, correspondiente al teorema anterior, cuando $\varepsilon = 0{,}1$ y $p = 51$.

# Series de términos no negativos

Son las series generadas por un sucesión cuyos términos son mayores o iguales que cero a partir de un cierto natural. Por ejemplo: $\sum(n-10)$

**Teorema**

Consideremos $(a_n)$.

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ a_n \geq 0 \Rightarrow \sum a_n$ no oscila (converge o diverge).

## Un paréntesis: medias pitagóricas

En su constante búsqueda de proporciones entre números enteros o entre segmentos, los pitagóricos se fijaron en ciertos valores intermedios que quizás pudieran explicar por qué ciertos acordes sonaban bien y otros mal. Los llamaron *medias* o *promedios*. En general, dados dos números $a$ y $b$ (o dos segmentos de longitudes $a$ y $b$), una *media* entre ellos es un tercer número (o segmento) que forma con ellos una cierta proporción, considerada atractiva o interesante. Las más importantes son:

la *media aritmética*, que es el número $A$ tal que $A - a = b - A$; la *media geométrica* o *proporcional*, el número $G$ tal que $a / G = G / b$, y *media armónica*, el número $H$ tal que

$(a - H) / (H - b) = a / b$.

En la actualidad definimos estas medias mediante fórmulas directas bien conocidas…

$$A = \frac{a+b}{2} \qquad G = \sqrt{ab} \qquad H = \frac{2ab}{a+b}$$

Moreno Castillo, R. y Vegas Montaner, J. M. (2006). *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivola.

# Serie armónica

Considera la sucesión real: $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} : a_n = \dfrac{1}{n}$

Comprueba que cada término es media armónica entre el término anterior y el que le sigue.

**Definición**

Llamaremos *serie armónica* a la serie: $\sum \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

# La serie armónica diverge

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

dos términos cada uno $\geq \frac{1}{4}$ — cuatro términos cada uno $\geq \frac{1}{8}$ — ocho términos cada uno $\geq \frac{1}{16}$ — $2^{n-1}$ términos cada uno $\geq \frac{1}{2^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Entonces: } S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n \\ \lim\left(1+\frac{1}{2}n\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim S_{2^n} = +\infty \underset{(S_n)\uparrow}{\Rightarrow} \lim S_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \ \text{D}$$

¿Es verdadero el recíproco de la condición necesaria de convergencia?

Completa y demuestra:

**Teorema : Criterio de comparación**

**(H)** Consideremos dos sucesiones reales $\left(a_n\right)$ y $\left(b_n\right)$, que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ 0 \leq a_n \leq b_n$

**(T)** Si $\sum b_n$ C $\Rightarrow$ $\sum a_n$ ............

Si $\sum a_n$ D $\Rightarrow$ $\sum b_n$ ............

Clasifica:

**(1)** $\sum \frac{1}{\left(n+1\right)^2}$ (Sug.: ten en cuenta la serie $\sum \frac{1}{n\left(n+1\right)}$.)

**(2)** $\sum \frac{1}{n-10}$

**Teorema : Criterio de comparación por paso al límite**

**(H)** Consideremos dos sucesiones reales $(a_n)$ y $(b_n)$ de términos no negativos.

**(T)** Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty \ \wedge \ \sum b_n \ \text{ D } \Rightarrow \ \sum a_n \ \text{ D}$

Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0^+ \ \wedge \ \sum b_n \ \text{ C } \Rightarrow \ \sum a_n \ \text{ C}$

## Teorema

**(H)** Consideremos dos sucesiones reales $(a_n)$ y $(b_n)$,

que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ a_n \geq 0 \ \wedge \ b_n \geq 0,$

y que $\exists p, q \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_1,\ p < \dfrac{a_n}{b_n} < q$

**(T)** $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase.

## Completa y demuestra:

**(H)** Consideremos dos sucesiones reales $(a_n)$ y $(b_n)$,

que cumplen que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ a_n \geq 0 \ \wedge \ b_n \geq 0.$

$\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}^+\right)$

**(T)** ..........................................................



**En particular si $(a_n) \sim (b_n)$, entonces................................**

# Bibliografía


Moreno Castillo, R. y Vegas Montaner, J. M. (2006). *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivola.

Rey, M. (2012). *Fichas para el curso de Análisis 1*.