PRÁCTICO 3

1- Sea f: $f(x) = e^{x^2}$ a- Calcular f'(2) aplicando la definición de derivada.
b- Hallar la ecuación de la tangente al gráfico de f(x) en x=2.

2- Considerar la gráfica de la función dada por f(x) = x^2+ax+b, donde a y b son constantes. Determinar los valores de a y b de manera que la recta y = 2x sea tangente a esta gráfica en el punto (2, 4).

3- $Sea\ f: f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + x + 2, & x < 0 \end{cases}$ Probar que f(x) es derivable en x=0

4- $Sea\ f: f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$ a) ¿Es f continua en x=1. b) ¿Es f derivable en x=1?

5- $Sea\ f: f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + x + 2, & x < 0 \end{cases}$
a) Probar que f no es derivable en x=0. b) Hallar ecuación de las semitangentes al gráfico de f en x=0

6- $Sea\ f: f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} - L|x+1|, & x \geq -2 \\ ax^2 + b, & x < -2 \end{cases}$ Hallar a y b para que f sea derivable en x=-2

7- Hallar f' en cada caso
$a) f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$ $b) f(x) = (e^x + 3x + 2)^5$ $c) f(x) = L\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $d) f(x) = sen\left(\frac{cosx}{x}\right)$
$d) f(x) = L(e^{2x} - 3e^{-x} + 2)$ $e) f(x) = \sqrt[3]{L(x^3+4) + x^3}$ $f) f(x) = sen(x + x^2)$

8- 1. Sea f : IR → IR tal que existe L = $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h}$
a) Probar o refutar que f es derivable en x_0.
b) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre L y f'(x_0)?

9- a- Calcular f' y f''
$a) f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$ $b) f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$ $c) f(x) = e^x\sqrt{1-x}$
$d) f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x+3}$ $e) f(x) = \frac{1 + L|x+1|}{L|x+1|}$
b- Estudiar signo de f'

10- Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones:
$a) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1} - L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ $b) f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ $c) f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

11- $Sea\ f: f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ $y\ g: g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 0 \\ -1, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

Probar que f presenta un máximo relativo en x=0.
Probar que g presenta un mínimo relativo en x=0.
Hallar extremos absolutos y puntos críticos de f y g en [-1,1].

12- Halle los extremos absolutos de las siguientes funciones:
(a) $f: f(x) = x^3 - 3x + 3$ en $\left[\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

(b) $f: f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ en $[-1,5]$
(c) $f: f(x) = (x-2)^2 - 4$ en $[0,5]$
(d) $f: f(x) = \frac{1}{x} + 1$ en $[1,3]$
(e) $f: f(x) = \begin{cases} (2-x)^2 - 4 & en\ [1,5] \\ 10 - x & en\ (5,6] \end{cases}$
(f) $f: f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 4 & en\ [0,4] \\ -(x-6)^2 + 4 & en\ (4,8] \end{cases}$

13- Se tuerce un trozo de alambre de longitud L de manera que forme un rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

14- Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón de 80cm de largo por 50cm de ancho, cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea conocer la longitud de los cuadrados que se deben cortar en las esquinas para que la caja tenga el mayor volumen posible.

15- Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un río y se desea delimitarlo de manera que no se utilice cerca de lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$36 por metro colocado y \$54 por metro colocado para el lado paralelo al río, determine las dimensiones del terreno de mayor área que pueda limitarse con \$5400 de cerca.

16- Determine un número en el intervalo [1/3, 2] tal que la suma del número y su inverso sea
(a) mínima (b) máxima

17- Determine un número del intervalo [-1,1] tal que la diferencia entre el número y su cuadrado sea: (a) mínima (b) máxima

18- Indicar cuáles de las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio y cuáles no. Justifique.
(a) $f: f(x) = x^{2/3}$ en [-1,8]
(b) $f: f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ en [0,1)
(c) $f: f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & si -\pi \le x < 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

19- La función $f: f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \le x < 1 \\ 0\ si\ x = 1 \end{cases}$ vale 0 en $x = 0$ y en $x = 1$, pero su derivada nunca es 0. Contradice el teorema de Rolle? Justifique.

20- (a) Hallar los ceros o raíces de las siguientes funciones polinómicas y los de sus primeras derivadas:
(i) $f(x) = x^2 - 4$
(ii) $f(x) = x^2 + 8x + 15$
(iii) $f(x) = (x-2)^2(x-1)$
(b) Utiliza el Teorema de Rolle para demostrar que entre cualesquiera dos ceros de $f: f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ hay un cero de $g: g(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$