Capítulo 8

Series numéricas

8.1. Definición y primeras propiedades

Informalmente, una serie es una suma de infinitos sumandos (ver antecedentes históricos y comentarios en [APOSTOL1, cap. 10] y en [DURÁN, pág. 184 y sigs.]). Estas sumas se usan implícitamente, por ejemplo, al considerar desarrollos decimales ilimitados de los números reales: así, la igualdad $\frac{7}{3} = 2,333\dots$ significa

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

suma con infinitos sumandos de la forma $\frac{3}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$. En general, consideraremos una sucesión cualquiera (a_n) y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ¿Qué sentido habrá que darle a esta suma? La respuesta se impone de modo natural: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene que ser $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$.

Analizando el proceso anterior, se trata de formar mediante la sucesión de sumandos (a_n) una nueva sucesión de sumas (s_m) dada por $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, $m \in \mathbb{N}$, y determinar el límite (si existe) de esta última sucesión. Esquemáticamente:

lugar	1	2	3	4	$\dots$	n	$\dots$	
término	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$	a_n	$\dots$	
suma	a_1	a_1+a_2	$a_1+a_2+a_3$	$a_1+a_2+a_3+a_4$	$\dots$	$a_1+\cdots+a_n$	$\dots$	$\to$?

Ahora bien: si, en definitiva, vamos a parar al estudio de la convergencia de una sucesión, ¿qué novedad vamos a encontrar respecto a lo que ya sabemos de sucesiones? El cambio radica en el punto de partida: tomando como dato la sucesión de sumandos (a_n), nos planteamos determinar propiedades de la sucesión de sumas (s_n) basándonos en propiedades de los términos a_n. Pasemos a formalizar estas ideas.

8.1.1. Series: términos y sumas parciales. Series convergentes, divergentes y oscilantes

Definición 8.1.1. *Una* **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es un par ordenado de sucesiones* $((a_n),(s_n))$ *relacionadas por la condición de que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *es*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

El término n-ésimo de la primera sucesión, a_n, recibe el nombre de **término n-ésimo** *de la serie; el término n-ésimo de la segunda sucesión, s_n, recibe el nombre de* **suma parcial n-ésima** *de la serie.*

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** *si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales es convergente, es decir, si*

$$\exists \lim_m s_m = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n \in \mathbb{R}.$$

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** *a $+\infty$, divergente a $-\infty$ u* **oscilante** *si la sucesión de sus sumas parciales es divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$ u oscilante, respectivamente.*

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se llama **suma** *de dicha serie al límite de la sucesión de sus sumas parciales; si la serie diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, se dice que su suma es $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Con un abuso de notación que no suele conducir a error, se denota la suma con el mismo símbolo que la serie. Es decir, se escribe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n,$$

cuando este límite existe.

Nota. A veces es cómodo considerar series de la forma $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, donde m es un número entero: las sumas parciales serán entonces $s_1 = a_m, s_2 = a_m + a_{m+1}, \dots, s_n = a_m + \cdots + a_{m+n-1}, \dots$

Se utiliza también la notación $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + \cdots$ en vez de $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ y, cuando no da lugar a confusión, se abrevia en $\sum a_n$.

Ejemplo. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una ***serie geométrica*** si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_{n+1} = ra_n$ (o $a_{n+1}/a_n = r$ si $a_1 \neq 0$); de otro modo, si es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Si s_n es su suma parcial n-ésima, se tendrá

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \begin{cases} a\frac{1-r^n}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \\ an & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Excluyendo el caso trivial $a = 0$, se sigue:

a) si $|r| < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es convergente y la suma es $\dfrac{a}{1-r}$;

b) si $r \geq 1$, la serie es divergente a $+\infty$ (si $a > 0$) o a $-\infty$ (si $a < 0$);

c) si $r = -1$, la serie es oscilante, aunque las sumas parciales están acotadas;

d) si $r < -1$, la serie es oscilante y las sumas parciales tienden, en valor absoluto, a $+\infty$.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se llama ***serie armónica*** Se comprueba que, para cada n, su suma parcial n-ésima, denotada habitualmente por H_n, cumple

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1),$$

luego la serie armónica diverge a $+\infty$ a pesar de que $\lim_n \dfrac{1}{n} = 0$.

El ***carácter*** de una serie no cambia si se prescinde de un número finito de sumandos (aunque sí puede cambiar el valor de la suma). Dicho de forma más precisa,

Proposición 8.1.2. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y un entero $m > 1$, se tiene:*

a) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si converge $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Si convergen, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

b) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.*

c) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$ si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$.*

d) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ es oscilante.*

Demostración. Basta observar que para todo $p > m$ es

$$\sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{p} a_n,$$

donde $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$ está fijo (independiente de p), y aplicar las definiciones previas y los resultados conocidos para sucesiones. □

8.1.2. Linealidad de la convergencia de series

Proposición 8.1.3. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Para cualesquiera α, $\beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n + \beta \sum_{n=1}^{N} a_n.$$ □

Corolario 8.1.4. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ no es convergente.*

Demostración. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ convergiera, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n + b_n) + (-1)a_n\Big)$$

también convergería, según la proposición 8.1.3. □

Ejemplos. La serie $\sum(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$ no converge, pues $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente y $\sum \frac{1}{2^n}$ sí.

Sin embargo, al sumar dos series no convergentes, la suma puede ser tanto convergente como no convergente: examínense los casos $a_n = b_n = 1$ y $a_n = 1$, $b_n = -1$.

8.1.3. Series telescópicas

Proposición 8.1.5. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones de números reales tales que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(denominada* **serie telescópica***) es convergente si y solo si la sucesión* (b_n) *tiene límite real, en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1}) = b_1 - b_{N+1}. \qquad \square$$

Ejemplo. Si $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, entonces la suma parcial N-ésima es simplemente

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1},$$

con lo que $\lim_N S_N = 1$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ejemplo. Sea ahora $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. La suma parcial de orden N es

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \big(\log(n+1) - \log n\big) = \log(N+1) - \log 1 = \log(N+1)$$

y tiende a $+\infty$. Es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge a $+\infty$.

Nota. Toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede ver trivialmente como una serie telescópica: basta poner

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

lo que no añade nada interesante al estudio de la serie. Como es obvio, el resultado que hemos obtenido solo es útil cuando la sucesión (b_n) es una sucesión conocida, cuyo comportamiento sabemos de antemano.

8.1.4. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Condición general de convergencia de Cauchy

Proposición 8.1.6 (condición necesaria para la convergencia de una serie). *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, necesariamente*

$$\lim_n a_n = 0.$$

Demostración. Si (s_N) es la sucesión de las sumas parciales, es decir,

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

entonces

$$\exists \lim_N s_N \in \mathbb{R}.$$

Como $a_N = s_N - s_{N-1}$, se deduce que

$$\lim_N a_N = \lim_N s_N - \lim_N s_{N-1} = 0. \qquad \square$$

Esta condición no es suficiente para la convergencia de una serie: veremos numerosos ejemplos de series no convergentes cuya sucesión de términos tiende a 0; el más sencillo es quizá la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

que ya hemos estudiado.

Teorema 8.1.7 (condición de Cauchy para la convergencia de una serie). *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n > N$ se cumple*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Demostración. La serie es convergente si y solo si lo es la sucesión (s_n) de sus sumas parciales, lo que equivale a que (s_n) sea una sucesión de Cauchy, y esto a su vez es es equivalente a que para cada $\varepsilon > 0$ exista un $N = N(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera m, $n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n > N$ sea $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$; pero

$$s_m - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{m} a_k. \qquad \square$$

8.2. Series de términos no negativos

8.2.1. Convergencia de una serie de términos no negativos. Criterios de comparación

El estudio del carácter de una serie se simplifica cuando esta es de términos no negativos.

Proposición 8.2.1. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales está acotada superiormente. En caso contrario, la serie diverge a $+\infty$.*

Demostración. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

la sucesión (s_n) es monótona no decreciente. Luego o bien está acotada superiormente y converge, o bien no está acotada superiormente y diverge a $+\infty$. $\square$

Este resultado permite deducir en algunos casos la convergencia (o divergencia) de una serie a partir del carácter de otra serie conocida.

Teorema 8.2.2 (criterio de comparación por mayoración). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n \geq n_0$ es $0 \leq a_n \leq b_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En consecuencia, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es asimismo divergente.*

Demostración. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Denotando por (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y por (t_n) la de $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $s_n \leq t_n$, luego si (t_n) está acotada superiormente, (s_n) estará acotada superiormente. Y si (s_n) no está acotada superiormente, (t_n) tampoco puede estar acotada superiormente. Basta aplicar ahora la proposición 8.2.1. □

Otra forma de comparar dos series es estudiar el cociente de sus términos:

Teorema 8.2.3 (criterio de comparación por paso al límite). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos no negativos. Supongamos que existe*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $\ell < +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) Si $0 < \ell$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

c) Si $0 < \ell < +\infty$, entonces las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.

Demostración. *a)* Sea $C \in (\ell, +\infty)$ (por ejemplo $C = \ell + 1$). Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \leq C$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $0 \leq a_n \leq Cb_n$ para todo $n \geq n_0$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$ converge y, por el criterio 8.2.2 de maroración, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Sea $C \in (0, \ell)$. Existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \geq C$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $a_n \geq Cb_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$ diverge y, por el criterio 8.2.2 de mayoración, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Basta aplicar *a)* y *b)*. □

Corolario 8.2.4 (series de términos equivalentes). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos. Supongamos que $(a_n) \sim (b_n)$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.*

Por supuesto, en este resultado las dos series pueden tener distinta suma.

La comparación con las series geométricas proporciona dos criterios muy útiles en la práctica: el criterio de la raíz y el criterio del cociente. Después veremos versiones más generales para series de términos cualesquiera, así que dejamos la demostración para entonces.

Proposición 8.2.5 (criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

a) Si $R < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $R > 1$, entonces $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Proposición 8.2.6 (criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.*

a) *Si* $R < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

b) *Si* $R > 1$, *entonces* $a_n \not\to 0$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Un complemento interesante del criterio del cociente es el criterio de Raabe.

Proposición 8.2.7 (criterio de Raabe). *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no negativos tal que existe* $R = \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n})$. *Entonces:*

a) *Si* $R > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

b) *Si* $R < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge a* $+\infty$.

Demostración. Ver [GARAY-CUADRA-ALFARO, teor. 5.28, págs. 101–102]. □

8.2.2. Otros criterios. Convergencia de algunas series de términos no negativos

Proposición 8.2.8 (criterio de la integral). *Sea* $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *no creciente. Entonces:*

a) *La integral impropia* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ *es convergente si y solo si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge.*

b) *Existe* $C = \lim\limits_n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f \right) \in [0, +\infty)$.

c) *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f + C + \varepsilon_n$, *con* $0 \le \varepsilon_n \le f(n) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f, \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \Big) \\ &= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx \ge 0. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} = s_n - t_n - s_{n+1} + t_{n+1} &= \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \\ &= \int_n^{n+1} [f(x) - f(n+1)]\,dx \ge 0, \end{aligned}$$

se sigue que (d_n) es monótona no creciente y acotada inferiormente por 0, con lo que existe $C = \lim\limits_n d_n \in [0, +\infty)$ y, en consecuencia, (s_n) y (t_n) serán simultáneamente convergentes o divergentes. Puesto que $f \ge 0$, la convergencia de (t_n) equivale asimismo a la de la integral $\int_1^{+\infty} f$, luego esta integral converge si y solo si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Con esto hemos demostrado *a)* y *b)*.