3. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre funciones son posibles y semejantes a las correspondientes efectuadas con los números. En esta sección definiremos la composición de funciones y la función inversa de una función; estos dos conceptos –composición e inversión de funciones- son importantes en el desarrollo del cálculo. Reconocer una suma, producto, cociente o composición de funciones es útil porque permite descomponer funciones complicadas en otras más sencillas.

3.1 Álgebra de funciones.

En esta sección consideraremos las operaciones con funciones. Las funciones obtenidas a partir de estas operaciones –llamadas la suma, la diferencia, el producto y la división se definen como sigue:

Definición 3.1.

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función $f + g$ está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de $f + g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.1.

Sea f(x) = x y g(x) = $\sqrt{x}$. Entonces (f + g) (x) = x + $\sqrt{x}$. El dominio de f es $(-\infty,\infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Así el dominio de f + g es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$.

Ejemplo 3.2.

Sea $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x$. Si x = 3, entonces $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$ y $g(3) = 4(3) = 12$. Así, (f + g) (3) = f(3) + g(3) = 26 – 12 = 14.

Definición 3.2.

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función $f - g$ está definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio de $f - g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.3.

Sea f(x) = $\sqrt{x+1}$ y g(x) = $\sqrt{x-4}$, entonces f(- g)(x) = f(x) – g(x) = $\sqrt{x+1}$ - $\sqrt{x-4}$. El dominio de f es $[-1, \infty)$, y el dominio de g es $[4, \infty)$. El dominio de f – g es $D_f \cap D_g = [-1, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$.

Definición 3.3.

Sean f y g dos funciones y D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función $f \cdot g$ está definida por

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. El dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.4.

Sea f(x) = x – 2 y g(x) = x + 2. Entonces (f·g)(x) = f(x) g(x) = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4. El dominio de f es (–∞, ∞) y el dominio de g es (–∞, ∞). Por tanto el dominio de f · g es $D_f \cap D_g$ = (–∞, ∞).

Ejemplo 3.5.

Sea f(x) = | x | y g(x) = 5. Entonces (f ·g)(x) = f(x) g(x) = | x |·5. El dominio de f es 3 y el dominio de g es 3. Entonces el dominio de f · g es $D_f \cap D_g$ = 3. Si x = -2, entonces (f · g)(-2) = f(-2) · g(-2) = |-2|5 = 2·5 = 10.

Definición 3.4.

> *Sean f y g dos funciones y D_f , D_g sus dominios respectivamente. Entonces la función f/g está definida por:*
>
> $$(f/g)(x) = f(x)/g(x)\ ,\ g(x) \neq 0$$
>
> *El dominio de f /g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores de x para los cuales g(x) = 0.*

Ejemplo 3.6.

Si f(x) = x + 4 y g(x) = x^2 – 1. Entonces (f/g) (x) = f(x) / g(x) = x + 4/(x^2 – 1). El dominio de f y el de g son los números reales. La función g(x) = x^2 – 1 es cero para x = 1 y x = -1. Por lo tanto el dominio de f/g es R – {-1, 1}

Ejemplo 3.7.

Si f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = $\sqrt{-x}$. Encuentre (f/g) (x).

Solución:

El dominio de f es [0, ∞) y el dominio de g es (-∞, 0]. Entonces $D_f \cap Dg$ = {0}, pero g(x) = $\sqrt{-x}$ es cero para x = 0. Ahora el dominio de f/g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores para los cuales g(x) es igual a cero. Por lo tanto el dominio de f/g es el conjunto vacío. De donde se tiene que la función (f/g)(x) = $\sqrt{x}$ / $\sqrt{-x}$ no tiene dominio.

Ejemplo 3.8

Sea f(x) = $\sqrt{4-x^2}$ y g(x) = 3x + 1. Encuentre a) la suma, b) la diferencia, c) el producto y d) la división de f y g.

Solución:

El dominio de f es el intervalo cerrado [-2, 2] y el dominio de g es 3. En consecuencia la intersección de sus dominios es [-2, 2] y las funciones pedidas están dadas por

a) f(+g) (x) = $\sqrt{4-x^2}$ + (3x + 1)

b) (f-g) (x) = $\sqrt{4-x^2}$ - (3x + 1)

c) (f · g) (x) = ($\sqrt{4-x^2}$) · (3x + 1)

d) (f · g) (x) = $\sqrt{4-x^2}$ / (3x + 1)

El dominio de (a), (b) y (c) es el intervalo [-2, 2]. En la parte (d) la función g(x) = 3x + 1 es cero si x = -1/3 y por lo tanto el dominio es {x | -2 ≤ x ≤ 2, x ≠ - 1/3}.

3.2. Composición de funciones

Sabemos que la notación "g(a)" significa el valor de la función g(x) cuando x = a; se obtiene al sustituir a por x, siempre que x aparezca en la expresión de g(x). Por ejemplo,

$$\text{si } g(x) = x^3 + 2, \text{ entonces } g(a) = a^3 + 1;$$

$$\text{si } g(x) = \sqrt{x - x^2}\text{, entonces } g(a) = \sqrt{a - a^2}$$

Si f(x) es una función, entonces g(f(x)) es la función que se obtiene al sustituir f(x) en lugar de x, siempre que ésta ocurra en la expresión de g(x). La función g(f(x)) es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional o para denotar la compuesta de g con f. Así (g o f) (x) = g(f(x)).

Si $g(x) = x^2$ y f(x) = x + 2, entonces $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 2)^2$. ¿Cuál es el dominio de g o f? La siguiente definición nos da la respuesta,

Definición 3.5.

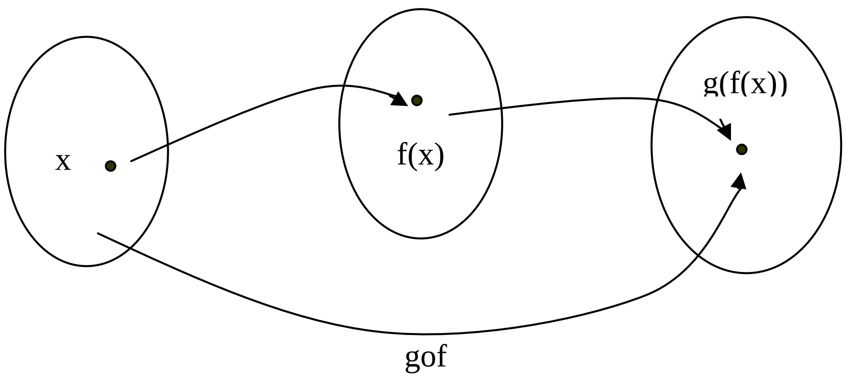
Si f es una función de X en Y y g es una función de Y a Z, entonces la función compuesta g o f es la función de X a Z dada por

$$(g \text{ o } f)(x) = g(f(x))$$

para cada x en X. El dominio de g o f es

$$D_{gof} = \{x \mid x\ \varepsilon\ D_f \text{ y } f(x)\ \varepsilon\ D_g\}$$

La siguiente figura muestra una representación geométrica de (gof) (x) = g(f(x))



Es muy importante hacer notar que para formar la función composición es necesario que el rango de la función f sea igual o un subconjunto del dominio de la función g.

Ejemplo 3.9.

Sea f(x) = x + 3 y g(x) = 2x + $\sqrt{x}$. Encuentre gof y especifique su dominio.

Solución:

Por las definiciones de gof, f y g, tenemos que

$$(gof)\ (x) = g(x + 3) = 2(x + 3) + \sqrt{x+3}$$

El dominio X de f es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo (gof) (x) es un número real sólo si x ≥ -3. Por lo tanto el dominio de gof es el intervalo [-3, ∞).

También es posible calcular la composición de f con g. En este caso obtenemos primero la imagen de x bajo g y luego aplicamos f a g(x). Esto nos da una función compuesta de Z a X denotada por fog. Por lo tanto por definición

$$(fog)\ (x) = f(g(x))$$

para cada x en Z.

Ejemplo 3.10.

Sean f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = 2x – 3. Encuentre (fog) (x), (gof)(x) y sus dominios.

Solución:

Por las definiciones de fog, gof, f y g tenemos

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x – 3) = \sqrt{2x-3}$$

El dominio de g es (-∞, ∞), y el dominio de f es [0, ∞). El dominio de fog es el conjunto de números reales para los cuales 2x – 3 ≥ 0, o, equivalentemente [3/2, ∞).

De la misma forma

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\ -3$$

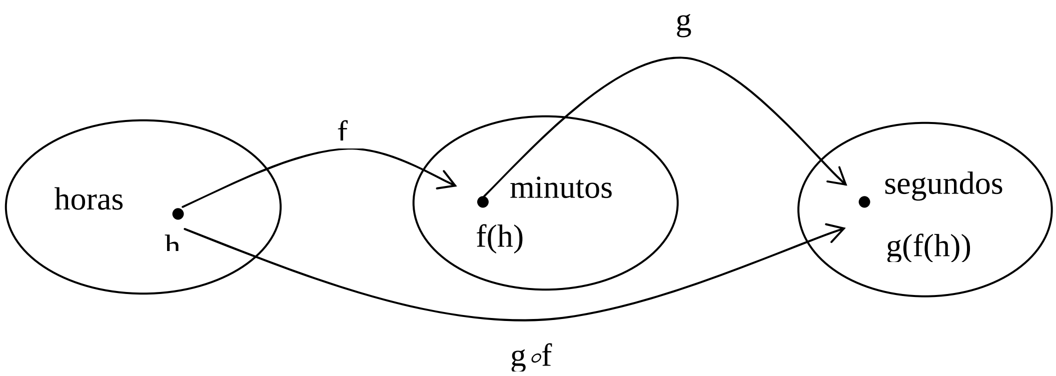
El dominio de gof es el conjunto de números reales para los cuales x ≥ 0, es decir [0, ∞).

nótese que fog puede ser una función diferente a gof.

Ejemplo 3.11.

Sea f la función definida por f(h) = 60 h que convierte horas en minutos, y g(m) = 60m la función que convierte minutos a segundos. Encuentre una función que convierta horas en segundos.

Solución:



$$(g\circ f)\ (h) = g(f(h)) = g(60h) = 60(60h) = 3600h$$

Los siguientes son ejemplos de composición de funciones.

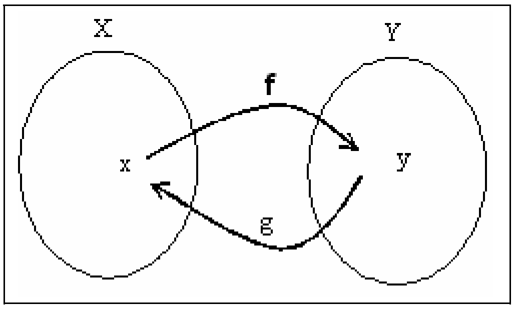
(1) El costo de producción de huevos por un granjero es función del número de gallinas que tiene; el número de gallinas depende a su vez del costo del alimento. El costo de producción de huevos es una función del costo del alimento para gallinas.

(2) La producción anual de naranjas de una huerta es función del número de árboles plantados en la huerta; el número de árboles plantados es función de la fertilidad del terreno. La producción anual es pues función de la fertilidad del terreno.

3.3. Inversa de una función.

Supongamos que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y. Esto significa que cada elemento y de Y se asocia con un solo elemento x de X. Podemos entonces definir una función g con dominio Y y rango X tal que

G(x) = x, si f(x) = y



La función g "manda" y con x, si la función f "manda" x con y. En cierto sentido la función g "deshace" lo hecho por la función f.

Como se ilustra en la figura, g(y) = x si f(x) = y. Esto significa que

$$g(y) = g(f(x)) = x, \text{ para cada x en X.}$$

La función g se llama la función inversa de f y la función f se llama la función inversa de g de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 3.6.

Si f es una función uno a uno con dominio X y contradominio Y, entonces una función g con dominio Y y contradominio X se llama función inversa de f si

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = X \text{ para cada x en Y}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = X \text{ para cada x en X}$$

Algunas veces a la función g se le denota como f^{-1} pero el –1 no significa que sea exponente.

Ejemplo 3.12.

Sea f(x) = 2x – 1 para todo número real. Encuentre la función inversa de f.

Solución:

No es difícil mostrar que f es uno a uno con dominio y rango 3 y por lo tanto la función inversa existe. Pongamos y = 2x – 1 y despejamos x en términos de y.

$$x = \frac{y+1}{2}$$

Esta ecuación nos permite encontrar x cuando se nos dé el valor de y. Escribamos g(x) = $y = \frac{x+1}{2}$, esta función nos permite calcular g(x) cuando se nos dé el valor de x. Proponemos a g como candidata a función inversa, verifiquemos

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = x$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

Por lo tanto g es la función inversa de f. Utilizando la notación f^{-1} equivalente tenemos que:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$$

Ejemplo 3.13.

Dado $f(x) = x^3 - 1$. Encuentre f^{-1}, si ésta existe.

Solución:

La función $f(x) = x^3 - 1$ es una función 1-1. Por lo tanto su inversa existe. Si f^{-1} existe, entonces por la definición 1.3.6 se tiene $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Así

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = x \\ &= (f^{-1}(x))^3 - 1 = x \\ &= (f^{-1}(x))^3 = x+1 \\ &= f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}\end{aligned}$$

Comprobamos la segunda condición tomando $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$\begin{aligned}(f_0{}^{-1}f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x+1}^{\,3} - 1 \\ &= x + 1 - 1 = x\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14.

Encuentre la función inversa de f suponiendo que su dominio X es el intervalo $[0, \infty)$ y $f(x) = x^2 + 2$ para toda x en X.

Solución:

El dominio se restringió de manera que f fuera 1.1. El rango de f es el intervalo $[2, \infty)$. Así como en el ejemplo 3.12 primero consideramos la ecuación $y = x^2 + 2$.

Despejando x tenemos $x=\pm\sqrt{y-2}$. Como x es no negativa descartamos $x=-\sqrt{y-2}$ y consideramos solamente la ecuación $x=\sqrt{y-2}$, y proponemos a f^{-1} como $f^{-1}(x) =\sqrt{y-2}$.

A continuación comprobamos las dos condiciones de la definición 3.6

$(f \circ f^{-1})(x) = f(^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2+2) = \sqrt{x^2+2-2} = \sqrt{x^2}\, x$

Esto demuestra que

$$f^{-1}(x) = x + 2 \qquad \text{para } x \geq 2.$$

3.3. Relación gráfica de una función y su inversa.

Si $y = f(x)$ es una función uno a uno $f(a) = b$, entonces su inversa $f^{-1}(x)$ “manda” b al punto a. Luego, si (a, b) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces (b, a) está en la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Esto significa que las gráficas de funciones inversas son reflexiones una de otra sobre la recta y = x. Si tenemos la gráfica de una función que es uno a uno, entonces podemos trazar la gráfica de su inversa que es la reflejada sobre la bisectriz y = x.

Lo anterior se muestra en las gráficas de los ejemplos 1.12, 1.13, 1.14.