EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Introducción

El concepto de número

Los matemáticos del siglo XX llevan a cabo una actividad intelectual muy sofisticada que no resulta fácil de definir, pero una gran parte de lo que hoy se conoce como matemática es el resultado de un pensamiento que originalmente se centró en los conceptos de número, magnitud y forma. Las definiciones de la matemática al estilo antiguo, tales como la de que es "la ciencia del número y de la magnitud", ya no son válidas hoy, pero sí que sugieren los orígenes que han tenido las diversas ramas de la matemática. Las nociones primitivas relacionadas con los conceptos de número, magnitud y forma se pueden hacer remontar a los primeros días de la raza humana, e incluso pueden encontrarse ya indicios de conceptos matemáticos en formas de vida que probablemente han precedido en muchos millones de años al género humano. Darwin, en su *Descent of Man* (1871), hace notar que algunos animales superiores tienen facultades tales como memoria y alguna forma de imaginación, y actualmente resulta incluso más claro que la capacidad para distinguir número, tamaño, orden y forma, aspectos rudimentarios todos ellos de un cierto sentido matemático, no son propiedad exclusiva del género humano. (…)
(…) la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre, (…)
Evidentemente nuestros antepasados muy primitivos contaban al principio sólo hasta dos, y cualquier conjunto que sobrepasara este nivel quedaba degradado a la condición de "muchos". Hay todavía en la actualidad muchos pueblos primitivos que cuentan objetos reuniéndolos en grupos d dos objetos cada uno.

La conciencia del número se hizo al fin lo suficientemente extendida y clara como para que se llegase a sentir la necesidad de expresar esta propiedad de alguna manera, al principio presumiblemente sólo en lenguaje simbólico. Los dedos de la mano pueden usarse fácilmente para representar un conjunto de dos, tres, cuatro o cinco objetos, y si no de uno, ello fue debido a que el número uno no era reconocido generalmente como un "verdadero número". Por medio de los dedos de las dos manos se podían representar colecciones de hasta diez elementos, y usando los dedos de manos y pies podía uno remontarse hasta veinte. Cuando el uso de los dedos resultaba ya inadecuado, podían utilizarse pequeños montones de piedra para representar una correspondencia biunívoca con los elementos de otro conjunto, y cuando el hombre primitivo empleaba este sistema de representación, a menudo amontonaba las piedras por grupos de cinco, debido a que antes se había familiarizado con los quíntuplos de objetos por observación de su propia mano o pie. Como hizo observar Aristóteles hace ya largo tiempo, lo extendido que se halla actualmente el uso del sistema decimal no es sino la consecuencia del accidente anatómico de que la mayor parte de nosotros nacemos con diez dedos en las manos y otros diez en los pies.(…)
(…) Los montones de piedras constituyen un mecanismo demasiado efímero para conservar información, y en vista de ello el hombre prehistórico registraba un número cortando muescas en un palo o en un trozo de hueso. Pocos de estos testimonios se han conservado hasta hoy, pero en Checoslovaquia se descubrió un hueso procedente de un cachorro de lobo, en le que aparecen 55 incisiones bastante profundas distribuidas en dos series, la primera con 25 y la segunda con 30, y en cada serie las incisiones están distribuidas en grupos de cinco. Los descubrimientos arqueológicos tales como éste nos suministran la evidencia de que la idea de número es mucho más antigua que los descubrimientos tecnológicos, tales como el uso de los metales o de los vehículos de ruedas; es

ampliamente anterior a la civilización y a la escritura, tal como se le entiende usualmente, ya que los utensilios con significado numérico tales como el hueso que hemos descrito han sobrevivido de un período de hace unos 30.000 años.

(Fragmento del libro *Historia de la Matemática"* de Carl B. Boyer)

Conjuntos Numéricos.

Algo de historia:
El número surgió de la necesidad de las personas de contar objetos
Hace más de 10.000 años, el hombre comenzó a cultivar y criar animales. El pastor primitivo llevaba temprano a la mañana a pastar las ovejas y las recogía de noche. Para controlar su rebaño, las contaba con piedras de la siguiente manera: por cada oveja que salía a pastar, colocaba una piedra enana bolsa y al fin del día a medida que las ovejas entraban en el corral iba sacando las piedras de la bolsa.
Ese número que surgió cuando el hombre contaba objetos usando otros de la naturaleza, es lo que conocemos como NÚMERO NATURAL.

En la antigüedad los chinos opinaban que los números podían ser entendidos como excesos y faltas y en la resolución de problemas usaban tablas de cálculos en las que representaban los excesos con palitos rojos y las faltas con palitos negros. Otros, como el matemático hindú Brahmagupta, en el siglo VI, tomaban esos números como pertenencias o deudas. Recién con el Renacimiento (s. XIV a XVI) es que nace la notación conocida de números con signo positivo o negativo, que astrónomos, físicos y comerciantes tanto necesitaban para expresar hechos de la vida diaria como las temperaturas, atracción de los cuerpos, ganancias, pérdidas, etc. Estos números son los que conocemos como NÚMEROS ENTEROS.

Alrededor del año 3000 a.C., un antiguo faraón llamado Sesóstris repartió las tierras al margen del río Nilo entre unos pocos agricultores privilegiados. Todos los años en el mes de julio las aguas del Nilo comenzaban a subir. Éste era el inicio de la inundación que duraba hasta setiembre. El río derrumbaba las cercas de piedra que cada agricultor usaba para marcar los límites de su terreno y cuando las aguas bajaban funcionarios del gobierno trazaban los límites del terreno de cada agricultor usando cuerdas para realizar la medición. Cada cuerda tenía una unidad de medida asignada y las personas encargadas de medirlas, llamados "estiradores de cuerda", estiraban la cuerda y verificaban cuántas veces aquella unidad de medida entraba en los lados del terreno. Sin embargo, por más adecuada que fuese la unidad de medida escogida difícilmente cabía un número entero de veces en el lado del terreno.
Fue por esta razón que los egipcios crearon un nuevo tipo de número: el NÚMERO FRACCIONARIO. De donde nacen los NÚMEROS RACIONALES.

Uno de los principios fundamentales del pitagorismo era el de que la esencia de todas las cosas, tanto en geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, era explicable a partir de las propiedades de los números naturales y sus razones. Sin embargo, los diálogos de Platón nos informan que la comunidad matemática griega se vio grandemente sorprendida por un descubrimiento que prácticamente demolía las bases de la fe pitagórica en los números enteros, la existencia de números que no pueden ser expresados mediante el cociente de dos enteros (con denominador no nulo). Hipaso de Metaponto calcula la diagonal de un cuadrado de lado 1 y descubre que este número no es racional.

"Los Pitagóricos enamorados de los números enteros creyeron que todas las cosas podían derivarse de ellos, empezando por todos los demas números. Se produjo una crisis en esta doctrina cuando descubrieron que la raíz cuadrada de 2 (La razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado) era irracional, es decir que $\sqrt{2}$ *no puede expresarse de modo preciso como la razón de dos enteros determinados por grandes que fueran estos números.*
*Este descubrimiento se llevó a cabo utilizando irónicamente como herramienta el teorema de Pitágoras. Irracional significaba en principio que un número no podía expresarse como una razón (*cociente*) Pero para los Pitagóricos llegó a suponer algo amenazador, un indicio de que su concepción del mundo podía carecer de sentido, lo cual es la otra acepción que tiene hoy la palabra irracional"* (COSMOS de Carl Sagan)

Para cubrir ésta como otras carencias de los racionales presentamos a los **números reales**.

Ejercicio 1
Completa la tabla, señalando los conjuntos a los cuales pertenecen cada uno de los números indicados, como se ejemplifica en la primera columna:

	-5	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{9}$	$-0,2$	$-\sqrt{7}$	$3,\hat{6}$	®	0	$1+\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{25}{16}}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$										

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS REALES

S_1) **Asociativa** $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
S_2) **Conmutativa** $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
S_3) **Neutro** $\exists \ 0 \in \mathbb{R} \ ; \ a+0=0+a=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
S_4) **Opuesto** $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \ op(a) \in \mathbb{R} \ ; \ a+op(a)=op(a)+a=0$

P_1) **Asociativa** $a.(b.c)=(a.b).c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
P_2) **Conmutativa** $a.b=b.a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
P_3) **Neutro** $\exists \ 1 \in \mathbb{R} \ \ 1 \neq 0 \ ; \ a.1=1.a=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
P_4) **Inverso** $\forall a \in \mathbb{R} \ \ a \neq 0 \ \ \exists inv(a) \in \mathbb{R}; \ a.inv(a)=inv(a).a=1$

SP) **Distributiva** $a.(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
$(b+c).a=b.a+ca \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Absorción: $a.0=0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Propiedad Hankeliana: $a.b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ b=0 \end{cases}$

Estas propiedades, junto a otras conocidas como la propiedad cancelativa de la suma y del producto, son las que nos permiten operar como sabemos desde la escuela y resolver ecuaciones.

Ejercicio 2

Busca las propiedades cancelativas.

Ejercicio 3

Calcula

a) $\frac{3}{5}+\frac{12}{5}=$ b) $\frac{3}{4}+\frac{11}{6}=$ c) $-\frac{3}{5}+\frac{11}{4}=$ d) $\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{8}=$ e) $(-2)\times\frac{11}{5}=$ f) $\frac{4}{9}\div\frac{20}{3}=$

g) $-\frac{3}{5}:(-2)=$ h) $\frac{7}{6}\times\left(\frac{15}{8}+1\right)=$ i) $1+\frac{7}{4}\cdot\frac{15}{8}-4=$ j) $1-\frac{2}{2-\frac{3}{4}}\cdot 3^{-1}=$ k) $\left(2^{-1}+3^{-1}\right)^{-1}=$

l) Desafío: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\cdots\frac{1117}{1118}\cdot\frac{1118}{1119}=$

Ejercicio 4

Resuelve en $\mathbb{R}$

a) $2-2x=3x$ b) $2(x+4)=11$ c) $3(2-y)+4=y+1$ d) $x+1=4x+3$

e) $x+\frac{3}{5}=\frac{x}{2}+1$ f) $\frac{9x+6}{2}+\frac{10-4x}{3}=3x+6$ g) $\frac{3y+5}{4}=\frac{12y+5}{6}$ h) $\frac{1}{x+1}=3$

i) $\frac{3}{x+2}=0$ j) $(x+1)(x+3)=0$ k) $(x+4)(x-3)(x-2)=0$

l) $3(x+4)(3x-2)=4(3x-2)$ m) $(x-2)(x+6)(x-3)-x(x-2)(x+6)=0$

n) $(x-2)(7-x)(2x)=x(x-2)(x+6)$

Bibliografía y materiales consultados

- Daniel Siberio – Notas del curso de Matemática A de 5º año científico
- Daniel Siberio – Notas del curso de Análisis I del IPA
- Adrián Milano – Repartidos del curso de Mat I 6º Ing 2010
- Alejandro Oyhenart – Notas del curso de Matemática A de 6º de ingeniería