Modulación y Procesamiento de Señales

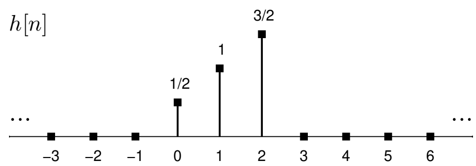
Práctico 2

Sistemas en Tiempo Discreto

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.2, Proakis) que indica el número de ejercicio del libro *Digital Signal Processing*, Proakis/Manolakis, 3rd edition.

✦ Ejercicio 1

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso se muestra en la figura siguiente:



(a) Escribir la expresión de la respuesta al impulso del sistema.

(b) Escribir la ecuación de transformación $y[n] = T\{x[n]\}$ del sistema.

✦ Ejercicio 2 **(2.21)**

Considere un sistema lineal arbitrario con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Muestre que si $x[n] = 0\ \forall n$, entonces $y[n]$ debe ser cero también para todo n.

✦ Ejercicio 3 **(2.1)**

Para cada uno de los siguientes sistemas, determine si el sistema es: estable, causal, lineal, invariante en el tiempo, y sin memoria.

(a) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = g[n]\cdot x[n]$, con $g[n]$ dada.

(b) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

(c) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

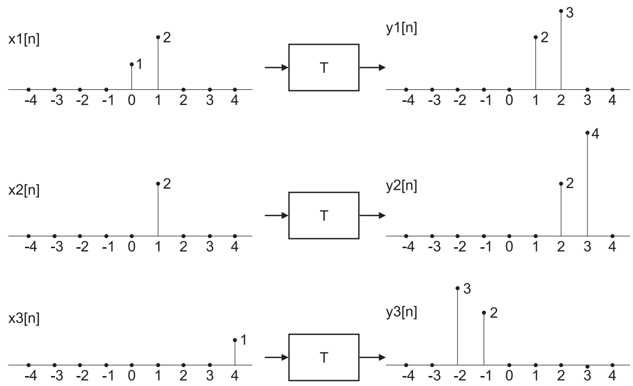
(d) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x[n-n_0]$

(e) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = a\cdot x[n] + b$

(f) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x[-n]$

✦ Ejercicio 4 **(2.35)**

Se sabe que el sistema T de la figura es invariante en el tiempo. Cuando las entradas al sistema son $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ las respuestas del mismo son $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y_3[n]$ respectivamente, como muestra la figura.



(a) Determinar si el sistema T podría ser lineal.

(b) Si la entrada al sistema T es $x[n] = \delta[n]$, ¿cuál es la respuesta del sistema $y[n]$?

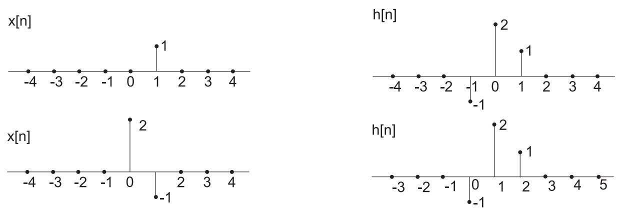
(c) Determine todas las posibles entradas $x[n]$ para las cuales la respuesta $y[n]$ del sistema T puede ser determinada solamente con la información dada.

⋆ Ejercicio 5 (2.62)

A partir de la definición de causalidad demuestre que para un sistema lineal e invariante en el tiempo la causalidad implica que la respuesta al impulso $h[n]$ es cero para $n < 0$. Un camino posible consiste en probar que si $h[n]$ no es cero para $n < 0$, entonces el sistema no puede ser causal. Muestre también que si la respuesta al impulso $h[n]$ es cero para $n < 0$, entonces el sistema necesariamente será causal.

✦ Ejercicio 6 (2.22)

Para cada uno de los pares de secuencias ($x[n]$, $h[n]$) de la figura encuentre la respuesta $y[n]$ (del sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$) a la entrada $x[n]$.



⋆ Ejercicio 7 (2.2)

Se sabe que la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo es cero excepto en el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$. Se sabe además que la entrada $x[n]$ vale cero excepto en el intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$. Como resultado, la salida $y[n]$ está destinada a ser cero excepto en algún intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$.

(a) Determine N_4 y N_5 en función de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(b) Si h[n] es cero excepto en M puntos consecutivos y $x[n]$ es cero excepto en N puntos consecutivos, ¿cuál es el máximo número de puntos consecutivos en los cuales $y[n]$ puede tomar valores distintos de cero?

✦ Ejercicio 8 (2.19)

Para cada una de las respuestas impulsivas de sistemas LTI, indicar cuáles de ellos son estables:

(a) $h[n] = 4^n u[n]$

(b) $h[n] = u[n] - u[n-10]$

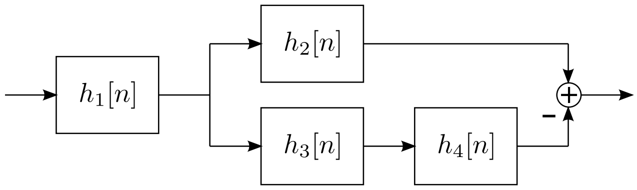
(c) $h[n] = 3^n u[-n-1]$

(d) $h[n] = \sin(\pi n/3) u[n]$

(e) $h[n] = (3/4)^{|n|} \cos(\pi n/4 + \pi/4)$

⋆Ejercicio 9 **(2.32, Proakis)**

Considere la interconexión de sistemas lineales invariantes en el tiempo de la siguiente figura:



(a) Expresar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema global equivalente en función de $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ y $h_4[n]$.

(b) Determinar $h[n]$ cuando

$$
\begin{aligned}
h_1[n] &= \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] \\
h_2[n] = h_3[n] &= (n+1)u[n] \\
h_4[n] &= \delta[n-2].
\end{aligned}
$$

⋆Ejercicio 10

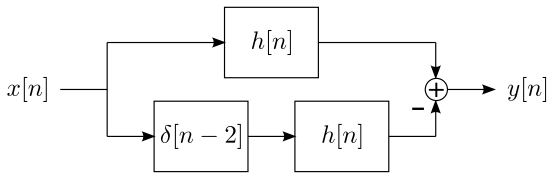
Se considera el sistema lineal e invariante en el tiempo con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ dado por la siguiente ecuación en recurrencia,

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \qquad \text{con } |a| < 1.$$

(a) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema (sugerencia: calcular la salida cuando la entrada es $x[n] = \delta[n]$). Asuma que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$ en $n < 0$.

(b) Evaluando directamente la convolución discreta, determine la respuesta al escalón $u[n]$ del sistema.

(c) Determinar la respuesta al escalón de siguiente sistema:

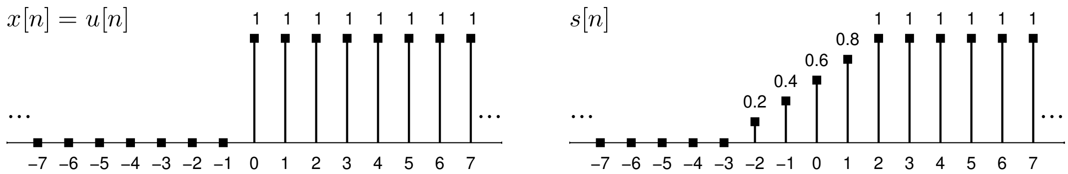


(d) Determinar la salida del sistema de la parte anterior si la entrada es

$$x[n] = u[n+5] - u[n-10].$$

⋆Ejercicio 11

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo con el par entrada-salida que se muestra en la siguiente figura:



(a) Calcular y dibujar la respuesta al impulso. Justificar.

(b) Escribir la ecuación de transformación del sistema $y[n] = T\{x[n]\}$. Escribir la ecuación de la salida $y[n]$ como ecuación en recurrencia con realimentación.

(c) ¿El filtro es estable? Justificar.

(d) ¿El filtro es causal? Justificar.

Sistemas recursivos

⋆Ejercicio 12 (2.4)

Se considera el sistema determinado por la ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n-1] + x[n],$$

con $|a| < 1$.

(a) Calcule la salida del sistema cuando la entrada es $x[n] = K\delta[n]$ y la condición inicial es $y[-1] = c$.

(b) Determinar si el sistema es lineal, causal e invariante en el tiempo.

✦Ejercicio 13 (2.20)

Considere la siguiente ecuación en diferencias que representa a un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal

$$y[n] + (1/a)y[n-1] = x[n-1].$$

(a) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema

(b) Indicar los valores de a para los cuales el sistema es estable.

✷Ejercicio 14

Considere el sistema dado por la siguiente ecuación en recurrencia:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + a_1 y[n-1].$$

(a) Encontrar la respuesta al impulso del sistema resolviendo la ecuación en recurrencia. Asumir que la condición inicial es $y[-1] = 0$. ¿El filtro es FIR o IIR? Justificar la respuesta.

(b) Indicar las condiciones que deben cumplir los coeficientes para que el filtro sea estable.

(c) Dibujar el diagrama de bloque del sistema.

(d) Descomponer el filtro en dos filtros en serie y dar las ecuaciones en recurrencia de los dos filtros de la serie e indicar si son FIR o IIR.

(e) Dibujar nuevamente el diagrama de bloques usando la menor cantidad posible de retardos.

✦Ejercicio 15 (2.31)

Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal en el que la entrada y la salida están relacionadas por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] - a^N x[n-N],$$

siendo N un entero positivo.

(a) Determine y dibuje la respuesta al impulso de este sistema

(b) ¿El sistema es FIR o IIR? Explique su respuesta.

(c) ¿Para qué valores de a el sistema es estable? Explique su respuesta.

✦Ejercicio 16 (2.12)

Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

El sistema es causal y satisface las condiciones de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n0$.

(a) Determinar la respuesta al impulso del sistema.

(b) ¿Es invariante con el tiempo el sistema? Justifique su respuesta.

Solución

Ejercicio 1

(a) De la figura, se deduce inmediatamente que la respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-2].$$

(b) Como se trata de un SLIT, la salida en función de la entrada es

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-2]\right) * x[n], \end{aligned}$$

resultando en

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + x[n-1] + \frac{3}{2}x[n-2]$$

Ejercicio 2

Sea $z[n] = T\{w[n]\}$. Como el sistema es lineal, entonces $\alpha\, z[n] = T\{\alpha\, w[n]\}$. Tomando $\alpha = 0$,

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{\alpha\, w[n]\} = \alpha\, z[n] = 0, \qquad \forall n.$$

QED

Ejercicio 3

	estable	causal	lineal	it	sin memoria
(a)	sii $g[n] < C\,\forall n$	sí	sí	sii $g[n] = cte$	sí
(b)	no	no	sí	no	no
(c)	sí	sii $n_0 = 0$	sí	sí	sii $n_0 = 0$
(d)	sí	sii $n_0 \geq 0$	sí	sí	sii $n_0 = 0$
(e)	sí	sí	sii $b = 0$	sí	sí
(f)	sí	no	sí	no	no

La solución de la no invariancia temporal en (g) presenta ciertas dificultades por lo que lo resolveremos detalladamente.

Representaremos con $T\{x\}$ la secuencia luego de aplicar la transformación y con $R_N\{x\}$ la secuencia luego de aplicar un retardo de N muestras.

Un sistema es invariante en el tiempo si

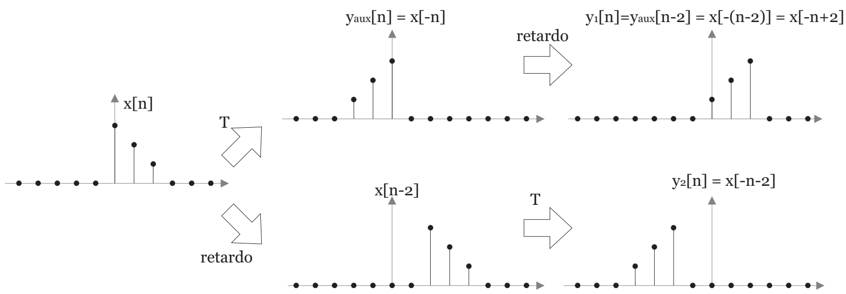
$$R_N\{T\{x\}\} = T\{R_N\{x\}\}.$$

Aplicar un retardo de N muestras es equivalente a sustituir en la secuencia las apariciones de n, la variable temporal, por $n - N$. Aplicar el sistema (g) es equivalente a sustituir las n por $-n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_N\{T\{x\}\} &= R_N\{x[-n]\} = x[-(n-N)] = x[-n+N], \\ T\{R_N\{x\}\} &= T\{x[n-N]\} = x[-n-N]. \end{aligned}$$

Como estas dos expresiones son distintas podemos deducir que el sistema no es invariante en el tiempo.

Lo que sigue es otra demostración basada en un contraejemplo.



Ejercicio 4

(a) Observando que $x_1[n] = x_2[n] + x_3[n+4]$, si el sistema fuese lineal entonces debería ocurrir que $T\{x_1\} = T\{x_2\} + T\{R_{-4}\{x_3\}\}$.

Dado que T es invariante en el tiempo, entonces $T\{R_{-4}\{x_3\}\} = R_{-4}\{T\{x_3\}\}$, y en consecuencia, $y_1[n] = y_2[n] + y_3[n+4]$.

Pero $y_1[1] = 2$, $y_2[1] = 0$ y $y_3[5] = 0$; luego, $y_1[1] \neq y_2[1] + y_3[1+4]$, y concluimos que el sistema T **no es lineal**.

(b) $\delta[n] = x_3[n+4] \Rightarrow T\{\delta\} = T\{R_{-4}\{x_3\}\} = R_{-4}\{T\{x_3\}\} \Rightarrow y[n] = y_3[n+4]$.

(c) Las entradas $x[n]$ para las que podemos determinar la respuesta sólo con la información dada son todas aquellas que resultan de retardar a x_1, x_2 o x_3.

Ejercicio 5

Como se sugiere, supongamos que existe $m < 0$ tal que la respuesta al impulso del sistema es distinta de cero:

$$T\{\delta\}[m] \neq 0$$

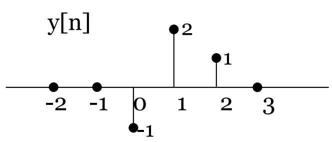
Como sabemos que T es lineal, entonces la salida a la entrada nula es la secuencia nula. Entonces encontramos dos entradas que son idénticas $\delta[n] = 0 \ \forall n \leq m$ pero sin embargo la salida en el instante m es distinta, por lo tanto el sistema no es causal.

Ejercicio 6

1.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{=0 \ \forall k \neq 1} h[n-k] = \underbrace{x[1]}_{=1} h[n-1]$$

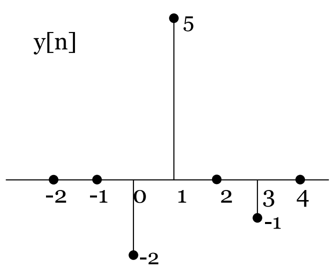
La forma de $y[n]$ puede verse en la siguiente figura.



2.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \underbrace{x[0]}_{=2} h[n] + \underbrace{x[1]}_{=-1} h[n-1] = 2h[n] - h[n-1]$$

La forma de $y[n]$ puede verse en la siguiente figura.



Ejercicio 7

(a) Sea h[n] la respuesta al impulso del sistema. La salida la podemos plantear entonces como $y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$. Para que la salida y[n] pueda ser distinta de cero debe cumplirse que $N_2 \leq n - m \leq N_3$ y $N_0 \leq m \leq N_1$ para algún m. Es decir que debemos poder encontrar m tal que $n - N_3 \leq m \leq n - N_2$ y $N_0 \leq m \leq N_1$. Para que esto ocurra los intervalos $[n - N_3, n - N_2]$ y $[N_0, N_1]$ no deben ser disjuntos. Esto nos da las condiciones para n:

$$n - N_2 \geq N_0$$

$$N_1 \geq n - N_3$$

De donde:

$$N_0 + N_2 \leq n \leq N_1 + N_3$$

Así obtenemos $N_4 = N_0 + N_2$ y $N_5 = N_1 + N_3$.

(b) Podemos aplicar la parte anterior sabiendo que $N_1 - N_0 = M - 1$ y $N_3 - N_2 = N - 1$. Sumando ambas ecuaciones tenemos que:

$$(N_1 + N_3) - (N_0 + N_2) = N + M - 2$$

Es decir:

$$N_5 - N_4 = N + M - 2$$

Por lo que la cantidad máxima de puntos consecitvos distintos de cero es $N + M - 1$.

Ejercicio 8

(a) Planteando la condición de estabilidad para SLIT's tenemos que:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |4^n u[n]| = \sum_{0}^{\infty} 4^n = \infty$$

Entonces el sistema no es estable.

(b) En este caso:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |u[n] - u[n-10]| = \sum_{0}^{9} 1 = 10 < \infty$$

Entonces el sistema es estable.

(c) En este caso:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |3^n u[-n-1]| = \sum_{-\infty}^{-1} |3^n| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3}^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{3}^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} < \infty$$

Entonces el sistema es estable.

(d) En este caso:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi n/3) u[n]| = \infty$$

Entonces el sistema no es estable.

(e) En este caso:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |(3/4)^{|n|} \cos(\pi n/4 + \pi/4)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |(3/4)^{|n|}| = -1 + 2 \times \sum_{0}^{\infty} |(3/4)^n| =$$

$$-1 + 2\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = -1 + 8 = 7 < \infty$$

Entonces el sistema es estable.

Ejercicio 9

(a) La respuesta al impulso de sistemas en serie es la convolución de la respuesta al impulso de los sistemas que integran la serie y la respuesta al impulso de sistemas en paralelo es la suma de las respuestas al impulso de los sistemas que integran el paralelo. Por lo tanto, la respuesta del sistema es

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] - h_3[n] * h_4[n]) \tag{1}$$

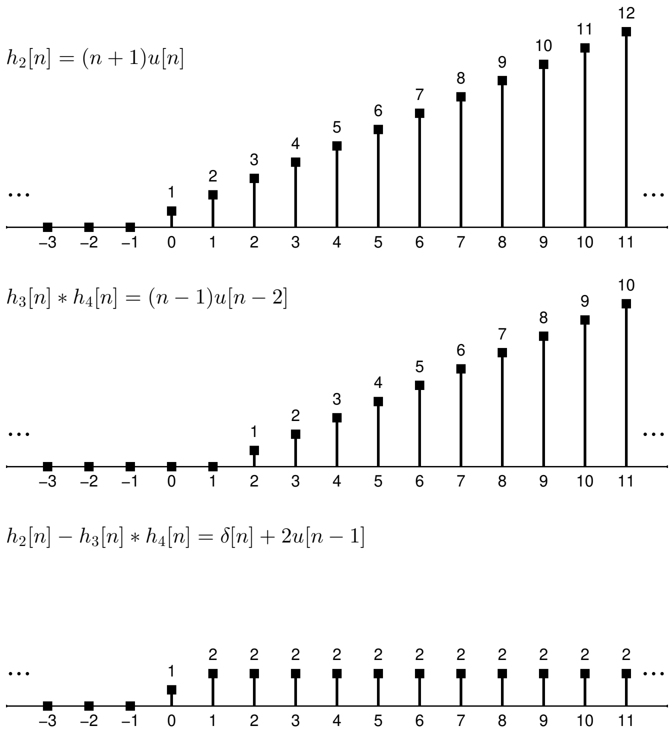
(b) Calculando los términos de la ecuación 1, se tiene que

$$\begin{aligned} h_3[n] * h_4[n] &= (n+1)u[n] * \delta[n-2] \\ &= (n-1)u[n-2]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} h_2[n] - h_3[n] * h_4[n] &= (n+1)u[n] - (n-1)u[n-2] \\ &= \delta[n] + 2u[n-1], \end{aligned}$$

como se muestra en la siguiente figura,



Finalmente, calculando la convolución con $h_1[n]$ de forma directa, se puede ver que

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1/2, & n = 0 \\ 5/4, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ 5/2, & n > 2 \end{cases},$$

o equivalentemente,

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{5}{4}\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3].$$

Ejercicio 10

(a) Resolviendo el sistema recursivamente para $n \geq 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} y[0] &= ay[-1] + \delta[0] = 1 \\ y[1] &= ay[0] + \delta[1] = a \\ y[2] &= ay[1] + \delta[2] = a^2 \\ y[3] &= ay[2] + \delta[3] = a^3 \\ &\vdots \\ y[n] &= a^n, \qquad \text{si } n \geq 0. \end{aligned}$$

Se concluye que la respuesta al impulso es

$$h[n] = a^n u[n], \quad \text{con } |a| < 1.$$

(b) La respuesta al escalón $s[n]$ del sistema es la convolución entre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema y el escalón $u[n]$. Aplicando la definición de la convolución se tiene que

$$\begin{aligned}
s[n] &= u[n] * h[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]h[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k]a^{n-k} \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \\
&= a^n \sum_{k=0}^{n} \left(a^{-1}\right)^k \\
&\overset{(b)}{=} a^n \frac{1-\left(a^{-1}\right)^{n+1}}{1-a^{-1}} \\
&= \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, \qquad \text{si } n \geq 0,
\end{aligned}$$

donde en (a) se tuvo en cuenta que $u[k]=0$ en $k<0$ y $u[n-k]=0$ en $k>n$ para establecer los límites de la sumatoria y en (b) se usó el resultado de la suma de los primeros $n+1$ términos de una serie geométrica. Se concluye que la respuesta al escalón es

$$s[n] = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}u[n].$$

(c) El sistema equivalente tiene respuesta al impulso

$$h_e[n] = h[n] - h[n-2].$$

La respuesta al escalón $s_e[n]$ del sistema equivalente es

$$\begin{aligned}
s_e[n] &= h_e[n] * u[n] \\
&= (h[n] - h[n-2]) * u[n] \\
&\overset{(a)}{=} h[n] * u[n] - h[n-2] * u[n] \\
&\overset{(b)}{=} h[n] * u[n] - h[n] * u[n-2] \\
&\overset{(c)}{=} s[n] - s[n-2],
\end{aligned}$$

en donde en (a) se empleó la propiedad distributiva de la convolución, en (b) que

$$\begin{aligned}
h[n-2] * u[n] &= (\delta[n-2] * h[n]) * u[n] \\
&= h[n] * (\delta[n-2] * u[n]) \\
&= h[n] * u[n-2]
\end{aligned}$$

y en (c) la propiedad de invarianza temporal. Se concluye que la respuesta al escalón es

$$s_e[n] = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}u[n] + \frac{a^{n-1}-1}{a-1}u[n-2].$$

(d) Usando argumentos similares a los de la parte anterior, se puede ver que la salida es

$$\begin{aligned}
y[n] &= s_e[n+5] - s_e[n-10] \\
&= \frac{a^{n+6}-1}{a-1}u[n+5] + \frac{a^{n+4}-1}{a-1}u[n+3] \\
&\quad + \frac{a^{n-9}-1}{a-1}u[n-10] + \frac{a^{n-11}-1}{a-1}u[n-12].
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

(a) Se quiere calcular la respuesta al impulso $h[n]$ conociendo la respuesta al escalón. Observando que

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

Como se trata de un SLIT, la respuesta al impulso es

$$h[n] = s[n] - s[n-1],$$

donde $s[n]$ es la salida cuando la entrada es $u[n]$. La expresión de la respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{1}{5} * (\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]),$$

tratándose del sistema de media móvil.

(b) La ecuación de transformación del sistema es

$$y[n] = \frac{1}{5} * (x[n+2] + x[n+1] + x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

y la ecuación en recurrencia es

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{5}(x[n+2] - x[n-3]).$$

(c) Como el sistema es FIR, es estable.

(d) El sistema no es causal debido a que existe $n < 0$ tal que $h[n] \neq 0$.

Ejercicio 12

(a) Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$, se ve que

$$\begin{aligned} y[0] &= ay[-1] + K\delta[0] = ac + K \\ y[1] &= ay[0] = a^2c + Ka \\ y[2] &= ay[1] = a^3c + Ka^2 \\ &\vdots \\ y[n] &= a^{n+1}c + Ka^n, \qquad \text{si } n \geq 0. \end{aligned}$$

Para calcular la salida en $n < 0$, se despeja $y[n-1]$ de la ecuación en recurrencia,

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n]),$$

y se calcula recursivamente la salida,

$$\begin{aligned} y[-2] &= a^{-1}y[-1] = a^{-1}c \\ y[-3] &= a^{-1}y[-2] = a^{-2}c \\ &\vdots \\ y[n] &= a^{n+1}c, \qquad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

Combinando los resultados para $n \geq 0$ y $n < 0$ se obtiene que

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n].$$

(b) El sistema no es lineal, ya que si la entrada es nula, la salida no es nula. Para ver esto, se considera el caso en que $K = 0$, caso en que la entrada es nula. La salida es

$$y[n] = a^{n+1}c.$$

y por lo tanto el sistema no es lineal.

El sistema no es causal ya que con entrada $x[n] = 0$ en $n < 0$, $y[n] \neq 0$ para todo n.

Para que el sistema sea invariante en el tiempo, se debería cumplir que si la entrada es $x[n - n_0]$, la salida es $y[n - n_0]$. Pero si la entrada es $x_1[n] = x[n - n_0] = K\delta[n - n_0]$, se puede ver que la salida es

$$y_1[n] = a^{n+1}c + Ka^{n-n_0}u[n - n_0].$$

Como $y_1[n] \neq y[n - n_0]$, el sistema no es invariante en el tiempo.

Se puede ver que si $y[-1] = c = 0$, es decir, el sistema se encuentra inicialmente en reposo, el sistema es lineal, causal e invariante en el tiempo.

Ejercicio 13

(a) Como es un SLIT, el sistema se encuentra inicialmente en reposo. Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$, se ve que

$$\begin{aligned}
y[0] &= a^{-1}y[-1] + \delta[-1] = 0\\
y[1] &= a^{-1}y[0] + \delta[0] = 1\\
y[2] &= a^{-1}y[1] + \delta[1] = a^{-1}\\
y[3] &= a^{-1}y[2] + \delta[2] = a^{-2}\\
&\vdots\\
y[n] &= a^{-n+1}, \qquad \text{si } n \geq 0.
\end{aligned}$$

La respuesta al impulso es por lo tanto

$$h[n] = a^{-n+1}u[n - 1].$$

(b) La respuesta al impulso es absolutamente sumable si $|a^{-1}| < 1$. Por lo tanto, el sistema es estable si $|a| > 1$.

Ejercicio 14

(a) Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$, se ve que

$$\begin{aligned}
y[0] &= b_0\\
y[1] &= b_1 + a_1b_0\\
y[2] &= a_1b_1 + a_1^2b_0\\
y[3] &= a_1^2b_1 + a_1^3b_0\\
&\vdots\\
y[n] &= a_1^{n-1}b_1 + a_1^nb_0, \qquad \text{si } n \geq 0.
\end{aligned}$$

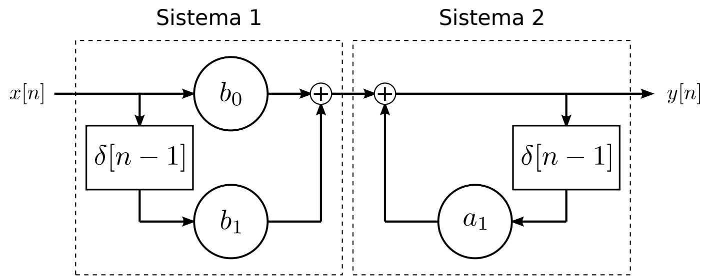
La respuesta al impulso es por lo tanto

$$h[n] = a_1^{n-1}b_1u[n - 1] + a_1^nb_0u[n].$$

Se trata de un sistema IIR, ya que $h[n] \neq 0$ para todo $n > 0$.

(b) Para que el sistema sea estable la respuesta debe ser absolutamente sumable. Es fácil ver que eso se cumple si $|a_1| < 1$

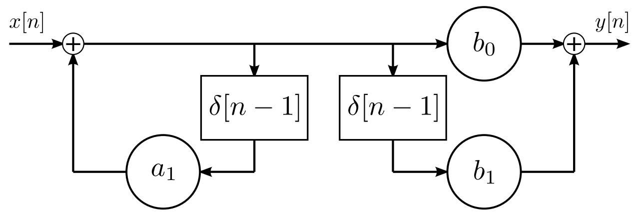
(c) El diagrama de bloques del sistema es el siguiente:



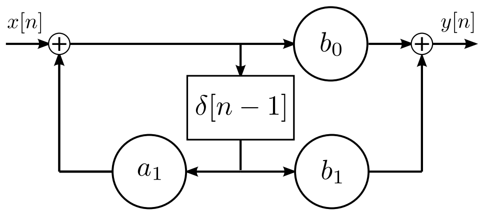
(d) El sistema se puede descomponer en los dos sistemas en serie que se muestran en la figura. Las ecuaciones de los sistemas son:

- Sistema 1: $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$
- Sistema 2: $y[n] = a_1 y[n-1] + x[n]$

(e) El sistema equivalente a la serie de dos sistemas es la convolución de la respuesta al impulso de cada sistema. Por la propiedad conmutativa de la convolución, se puede cambiar el orden de los sistemas que integran la serie sin cambiar el sistema equivalente:



Además, la señal que pasa por ambas líneas de retardo es igual, y por lo tanto, se puede emplear solo una línea de retardo de la siguiente forma:



Ejercicio 15

(a) Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$ para $x[n] = \delta[n]$, se ve que

$$
\begin{aligned}
y[0] &= 1 \\
y[1] &= a \\
y[2] &= a^2 \\
&\vdots \\
y[N-1] &= a^{N-1} \\
y[N] &= a^N - a^N = 0 \\
y[N+1] &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

La respuesta al impulso es por lo tanto

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a^k \delta[n-k].$$

(b) El sistema es FIR porque $h[n] \neq 0$ solo en $n \in [0,\, N-1]$.

(c) El sistema es estable para todo $a < \infty$ ya que la respuesta al impulso de de largo finito y por lo tanto es absolutamente sumable.

Ejercicio 16

(a) Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$ para $x[n] = \delta[n]$, se ve que

$$\begin{aligned} y[0] &= 1 \\ y[1] &= 1 \\ y[2] &= 2 \\ y[3] &= 3 \times 2 \\ y[4] &= 4 \times 3 \times 2 \\ &\vdots \\ y[n] &= n! \end{aligned}$$

La respuesta al impulso es por lo tanto

$$h[n] = n!u[n]$$

(b) Se considera el caso en que la entrada es $x_1[n] = x[n-1] = \delta[n-1]$. Si el sistema es invariante en el tiempo, la salida debería ser $y_1[n] = h[n-1] = (n-1)!u[n-1]$. Calculando la salida recursivamente en $n \geq 0$ para $x_1[n] = \delta[n-1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_1[0] &= 0 \\ y_1[1] &= 1 \\ y_1[2] &= 2 \\ y_1[3] &= 3 \times 2 \\ y_1[4] &= 4 \times 3 \times 2 \\ &\vdots \\ y_1[n] &= n! \end{aligned}$$

y por lo tanto, la salida es

$$y_1[n] = n!u[n-1].$$

Se ve que

$$y_1[n] = n!u[n-1] \neq (n-1)!u[n-1] = h[n-1]$$

y por lo tanto, el sistema no es invariante en el tiempo.