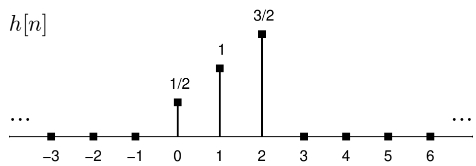
Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 2
Sistemas en Tiempo Discreto

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.2, Proakis) que indica el número de ejercicio del libro *Digital Signal Processing*, Proakis/Manolakis, 3rd edition.

✦ Ejercicio 1

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso se muestra en la figura siguiente:



(a) Escribir la expresión de la respuesta al impulso del sistema.

(b) Escribir la ecuación de transformación $y[n] = T\{x[n]\}$ del sistema.

✦ Ejercicio 2 (2.21)

Considere un sistema lineal arbitrario con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Muestre que si $x[n] = 0\ \forall n$, entonces $y[n]$ debe ser cero también para todo n.

✦ Ejercicio 3 (2.1)

Para cada uno de los siguientes sistemas, determine si el sistema es: estable, causal, lineal, invariante en el tiempo, y sin memoria.

(a) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = g[n] \cdot x[n]$, con $g[n]$ dada.

(b) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

(c) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

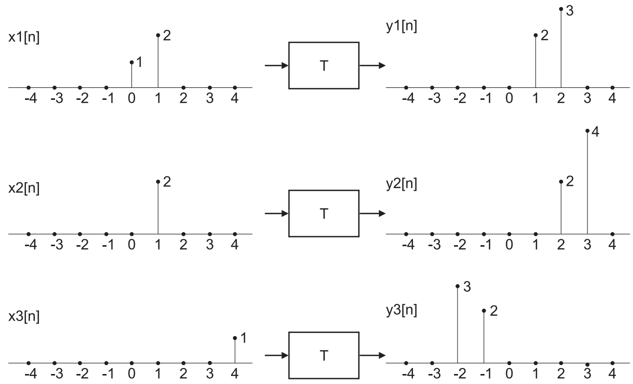
(d) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x[n-n_0]$

(e) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = a \cdot x[n] + b$

(f) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x[-n]$

✦ Ejercicio 4 (2.35)

Se sabe que el sistema T de la figura es invariante en el tiempo. Cuando las entradas al sistema son $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ las respuestas del mismo son $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y_3[n]$ respectivamente, como muestra la figura.



(a) Determinar si el sistema T podría ser lineal.

(b) Si la entrada al sistema T es $x[n] = \delta[n]$, ¿cuál es la respuesta del sistema $y[n]$?

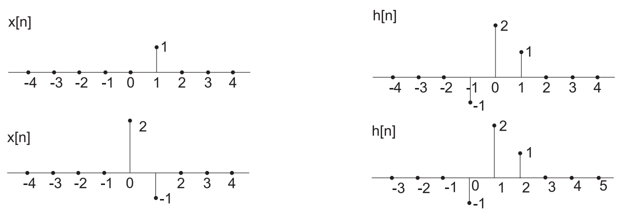
(c) Determine todas las posibles entradas $x[n]$ para las cuales la respuesta $y[n]$ del sistema T puede ser determinada solamente con la información dada.

⋆ Ejercicio 5 (2.62)

A partir de la definición de causalidad demuestre que para un sistema lineal e invariante en el tiempo la causalidad implica que la respuesta al impulso $h[n]$ es cero para $n < 0$. Un camino posible consiste en probar que si $h[n]$ no es cero para $n < 0$, entonces el sistema no puede ser causal. Muestre también que si la respuesta al impulso $h[n]$ es cero para $n < 0$, entonces el sistema necesariamente será causal.

✦ Ejercicio 6 (2.22)

Para cada uno de los pares de secuencias ($x[n]$, $h[n]$) de la figura encuentre la respuesta $y[n]$ (del sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$) a la entrada $x[n]$.



⋆ Ejercicio 7 (2.2)

Se sabe que la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo es cero excepto en el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$. Se sabe además que la entrada $x[n]$ vale cero excepto en el intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$. Como resultado, la salida $y[n]$ está destinada a ser cero excepto en algún intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$.

(a) Determine N_4 y N_5 en función de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(b) Si h[n] es cero excepto en M puntos consecutivos y $x[n]$ es cero excepto en N puntos consecutivos, ¿cuál es el máximo número de puntos consecutivos en los cuales $y[n]$ puede tomar valores distintos de cero?

✦ Ejercicio 8 (2.19)

Para cada una de las respuestas impulsivas de sistemas LTI, indicar cuáles de ellos son estables:

(a) $h[n] = 4^n u[n]$

(b) $h[n] = u[n] - u[n - 10]$

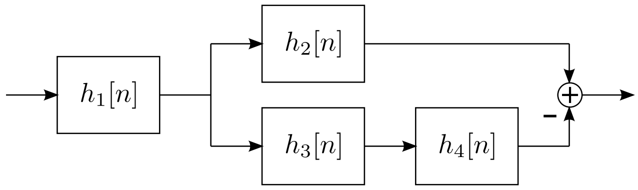
(c) $h[n] = 3^n u[-n - 1]$

(d) $h[n] = \sin(\pi n/3)u[n]$

(e) $h[n] = (3/4)^{|n|} \cos(\pi n/4 + \pi/4)$

⋆ Ejercicio 9 **(2.32, Proakis)**

Considere la interconexión de sistemas lineales invariantes en el tiempo de la siguiente figura:



(a) Expresar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema global equivalente en función de $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ y $h_4[n]$.

(b) Determinar $h[n]$ cuando

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$
$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1)u[n]$$
$$h_4[n] = \delta[n-2].$$

⋆ Ejercicio 10

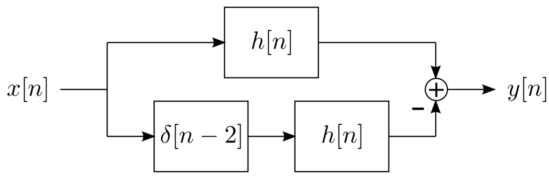
Se considera el sistema lineal e invariante en el tiempo con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ dado por la siguiente ecuación en recurrencia,

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \qquad \text{con } |a| < 1.$$

(a) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema (sugerencia: calcular la salida cuando la entrada es $x[n] = \delta[n]$). Asuma que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$ en $n < 0$.

(b) Evaluando directamente la convolución discreta, determine la respuesta al escalón $u[n]$ del sistema.

(c) Determinar la respuesta al escalón de siguiente sistema:

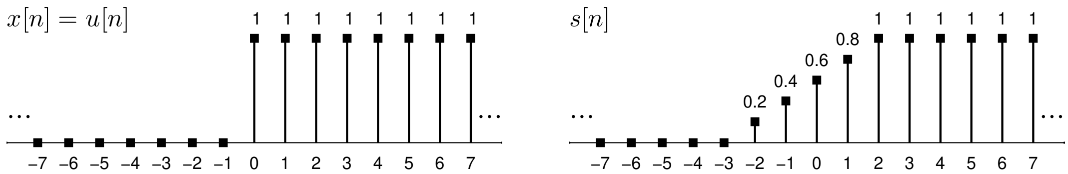


(d) Determinar la salida del sistema de la parte anterior si la entrada es

$$x[n] = u[n+5] - u[n-10].$$

⋆ Ejercicio 11

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo con el par entrada-salida que se muestra en la siguiente figura:



(a) Calcular y dibujar la respuesta al impulso. Justificar.

(b) Escribir la ecuación de transformación del sistema $y[n] = T\{x[n]\}$. Escribir la ecuación de la salida $y[n]$ como ecuación en recurrencia con realimentación.

(c) ¿El filtro es estable? Justificar.

(d) ¿El filtro es causal? Justificar.

Sistemas recursivos

★ Ejercicio 12 (2.4)

Se considera el sistema determinado por la ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n-1] + x[n],$$

con $|a| < 1$.

(a) Calcule la salida del sistema cuando la entrada es $x[n] = K\delta[n]$ y la condición inicial es $y[-1] = c$.

(b) Determinar si el sistema es lineal, causal e invariante en el tiempo.

✦ Ejercicio 13 (2.20)

Considere la siguiente ecuación en diferencias que representa a un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal

$$y[n] + (1/a)y[n-1] = x[n-1].$$

(a) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema

(b) Indicar los valores de a para los cuales el sistema es estable.

✷ Ejercicio 14

Considere el sistema dado por la siguiente ecuación en recurrencia:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + a_1 y[n-1].$$

(a) Encontrar la respuesta al impulso del sistema resolviendo la ecuación en recurrencia. Asumir que la condición inicial es $y[-1] = 0$. ¿El filtro es FIR o IIR? Justificar la respuesta.

(b) Indicar las condiciones que deben cumplir los coeficientes para que el filtro sea estable.

(c) Dibujar el diagrama de bloque del sistema.

(d) Descomponer el filtro en dos filtros en serie y dar las ecuaciones en recurrencia de los dos filtros de la serie e indicar si son FIR o IIR.

(e) Dibujar nuevamente el diagrama de bloques usando la menor cantidad posible de retardos.

✦ Ejercicio 15 (2.31)

Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal en el que la entrada y la salida están relacionadas por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] - a^N x[n-N],$$

siendo N un entero positivo.

(a) Determine y dibuje la respuesta al impulso de este sistema

(b) ¿El sistema es FIR o IIR? Explique su respuesta.

(c) ¿Para qué valores de a el sistema es estable? Explique su respuesta.

✦ Ejercicio 16 (2.12)

Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

El sistema es causal y satisface las condiciones de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n0$.

(a) Determinar la respuesta al impulso del sistema.

(b) ¿Es invariante con el tiempo el sistema? Justifique su respuesta.