Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 1
Señales en Tiempo Discreto

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✥ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.2, Proakis) que indica el número de ejercicio del libro *Digital Signal Processing*, Proakis/Manolakis, 3rd edition.

✥ Ejercicio 1 **(1.2, Proakis)**

Determinar cuál de las siguientes señales sinusoidales son periódicas y en caso de serlo, calcular el periodo.

(a) $x[n] = \cos 0.01\pi n$

(b) $x[n] = \cos\left(\frac{30\pi n}{105}\right)$

(c) $x[n] = \cos 3\pi n$

(d) $x[n] = \sin 3n$

(e) $x[n] = \sin\left(\frac{62\pi n}{10}\right)$

✥ Ejercicio 2 **(1.3, Proakis)**

Determinar cual de las siguientes señales sinusoidales son periódicas y en caso de serlo, calcular el periodo.

(a) $x_a(t) = 3\cos(5t + \pi/6)$

(b) $x[n] = 3\cos(5n + \pi/6)$

(c) $x[n] = 2\exp[j(n/6 - \pi)]$

(d) $x[n] = \cos(n/8)\cos(\pi n/8)$

(e) $x[n] = \cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$

✥ Ejercicio 3 **(2.7-2.40)**

Determine si cada una de las señales siguientes es periódica. Para las que sean periódicas, indique su periodo.

(a) $x[n] = e^{j(\pi n/6)}$

(b) $x[n] = e^{j(3\pi n/4)}$

(c) $x[n] = [sen(\pi n/5)]/(\pi/n)$

(d) $x[n] = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}$

(e) $x[n] = ne^{j(\pi n)}$

(f) $x[n] = e^{jn}$

✥ Ejercicio 4 **(1.5, Proakis)**

Considere la siguiente señal sinusoidal analógica:

$$x_a(t) = 3\sin(100\pi t).$$

(a) Esbozar la señal $x_a(t)$ en $0 \leq t \leq 30$ ms.

(b) La señal se muestrea a una frecuencia de muestreo de $f_s = 300$ muestras/s. Determinar la frecuencia de la señal discreta $x[n] = x_a(nT)$, donde T es el período de muestreo, $T = 1/f_s$. Mostrar además que $x[n]$ es periódica y calcular el periodo.

(c) Calcular los valores de las muestras en un periodo. Esbozar $x[n]$ en el mismo diagrama que $x_a(t)$.

✥ Ejercicio 5 **(2.1, Proakis)**

Una señal en tiempo discreto se define como

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \dfrac{n}{3} & -3 \leq n \leq -1 \\ 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

(a) Esbozar la señal $x[n]$.

(b) Esbozar las señales que resultan de:

(1) Invertir temporalmente y luego retardar la señal resultante 4 muestras.

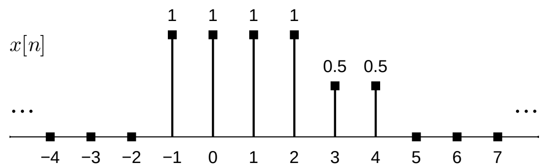
(2) Retardar la señal 4 muestras y luego invertir temporalmente la señal resultante.

(c) Demostrar que el procedimiento realizado en (1) resulta en $x[-n+4]$ y el realizado en (2) resulta en $x[-n-4]$

(d) De los resultados de las partes (b) y (c), indicar una regla para determinar la señal $x[-n+k]$ a partir de $x[n]$.

✥ Ejercicio 6 **(2.2, Proakis)**

Considere la señal mostrada en la siguiente figura:



Esbozar cada una de las siguientes señales.

(a) $x[n-2]$

(b) $x[4-n]$

(c) $x[n+2]$

(d) $x[2n]$

(e) $x[n]u[2-n]$

(f) $x[n-1]\delta[n-3]$

(g) $x[n^2]$

❖ Ejercicio 7

Considere la señal definida como

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 10 \\ -\dfrac{1}{2} & 11 \leq n \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Escribir $x[n]$ en términos de la señal escalón $u[n]$ y en términos de impulsos $\delta[n]$ escalados y retardados.

Solución

Ejercicio 1

La condición de periodicidad es que existan (k, N) enteros tal que $\omega N = 2k\pi$, donde ω es la frecuencia en radianes. El periodo es el menor entero N que cumple la condición.

(a) $\omega = 0.01\pi = \dfrac{\pi}{100}$

$$\frac{\pi N}{100} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad N = 200k \quad \Rightarrow \quad N = 200, \quad \text{con } k = 1$$

(b) $\omega = \dfrac{30\pi}{105} = \dfrac{2\pi}{7}$

$$\frac{2\pi N}{7} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad N = 7k \quad \Rightarrow \quad N = 7, \quad \text{con } k = 1$$

(c) $\omega = 3\pi$, que es lo mismo que $\omega = \pi$, ya que

$$x[n] = \cos 3\pi n = \cos(3\pi n - 2\pi n) = \cos(\pi n)$$

Se tiene entonces que

$$\pi N = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad N = 2k \quad \Rightarrow \quad N = 2, \quad \text{con } k = 1$$

(d) $\omega = 3$

$$3N = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{3N}{2k} = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{No periodica ya que } \pi \text{ es irracional.}$$

(e) Como

$$\sin\left(\frac{62\pi n}{10}\right) = \sin\left(\frac{62\pi n}{10} - 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{42\pi n}{10}\right) = \sin\left(\frac{21\pi n}{5}\right),$$

por lo tanto, $\omega = \dfrac{21\pi}{5}$.

$$\frac{21\pi N}{5} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad 21N = 10k \quad \Rightarrow \quad N = 10, \quad \text{con } k = 21$$

Ejercicio 2

(a) La señal es analógica, o equivalentemente, de tiempo continuo. Una sinusoide analógica siempre es periódica, y en este caso, la frecuencia es $\omega = 5$ rad/s. El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ seg.}$$

(b) $\omega = 5$ rad.

$$5N = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \frac{5N}{2k} = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{No periodica ya que } \pi \text{ es irracional.}$$

(c) $\omega = \dfrac{1}{6}$

$$\frac{N}{6} = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{12k} = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{No periodica ya que } \pi \text{ es irracional.}$$

(d) Siguiendo el mismo razonamiento que en los casos anteriores es fácil ver que $\cos(n/8)$ no es periódica y $\cos(\pi n/8)$ es periódica. Como $x[n]$ es el producto de una señal no periódica con una señal periódica, no es periódica.

(e) $\cos(\pi n/2)$ es periódica con periodo $N = 4$, $\sin(\pi n/8)$ es periódica con periodo $N = 16$ y $\cos(\pi n/4 + \pi/3)$ es periódica con periodo $N = 8$. Por lo tanto, $x[n]$ es periódica con periodo $N = 16$, ya que 16 es el mínimo común múltiplo de 4, 8 y 16.

Ejercicio 3

(a) Periódica, $N = 12$.

(b) Periódica, $N = 8$.

(c) No periódica.

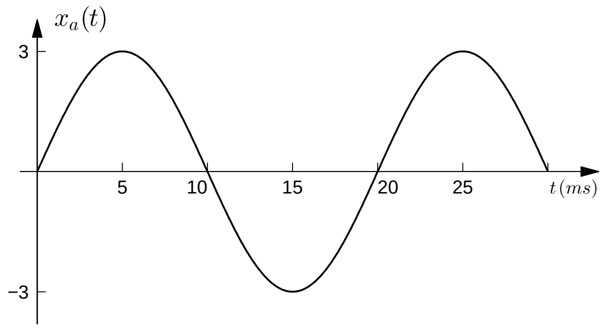
(d) No periódica.

(e) No periódica.

(f) No periódica.

Ejercicio 4

(a) La señal se muestra en la siguiente figura:



(b) La señal discreta resultante del muestreo es

$$\begin{aligned} x[n] &= x_a(nT) \\ &= 3\sin(100\pi nT), \end{aligned}$$

con n entero. Teniendo en cuenta que el periodo de muestreo es $T = 1/f_s = 1/300$ segundos, resulta en

$$x[n] = 3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

La frecuencia de la señal discreta es por lo tanto

$$\omega = \frac{\pi}{3} \text{ radianes/muestra.}$$

La condición para que sea periódica es que existan N y k enteros tal que $\omega N = 2k\pi$. En este caso, se tiene que

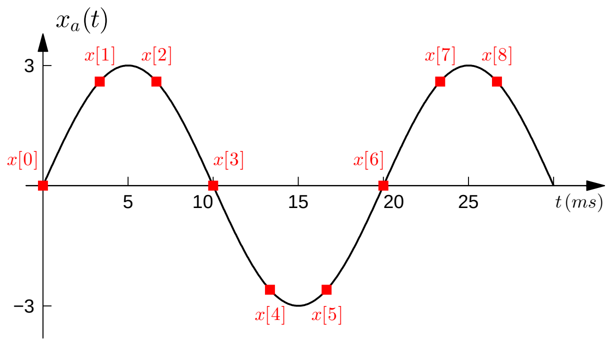
$$\frac{\pi N}{3} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad N = 6k \quad \Rightarrow \quad N = 6, \quad \text{con } k = 1,$$

concluyendo que la señal es periódica de periodo $N = 6$ muestras.

(c) Los valores de las muestras de $x[n]$ en un periodo son los siguientes

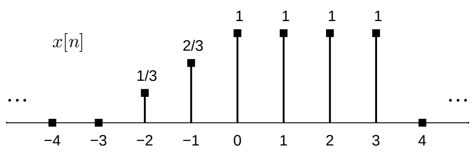
$$\begin{aligned} x[0] &= 3\sin(0) = 0 \\ x[1] &= 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x[2] &= 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x[3] &= 3\sin(\pi) = 0 \\ x[4] &= 3\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x[5] &= 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Un esbozo de la señal discreta se muestra en la siguiente figura:



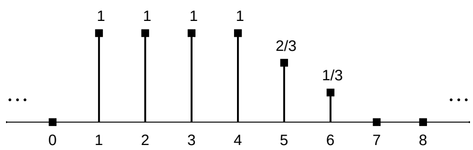
Ejercicio 5

(a) La señal se muestra en la siguiente figura:

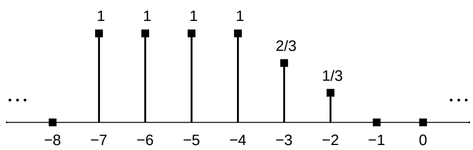


(b)

(1) A continuación la señal $x[4-n]$:



(2) A continuación la señal $x[-n-4]$:

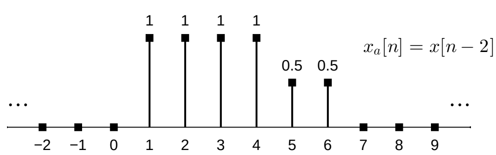


(c) Sea $x_1[n] = x[-n]$, una inversión temporal de $x[n]$, si luego efectuamos un retardo temporal de 4 muestras a $x_1[n]$ resulta $x_2[n] = x_1[n-4] = x[-(n-4)] = x[4-n]$, que es lo que queríamos demostrar.

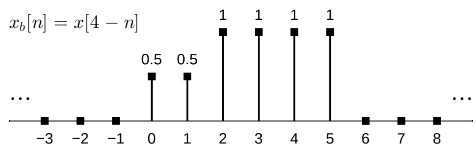
(d) Sea $x_3[n] = x[n-4]$, un retardo temporal de 4 muestras de $x[n]$, si luego efectuamos una inversión temporal a $x_3[n]$ resulta $x_4[n] = x_3[-n] = x[-n-4]$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 6

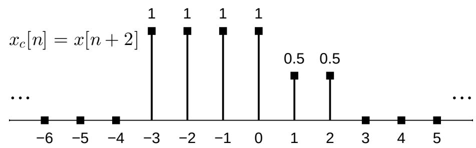
(a)



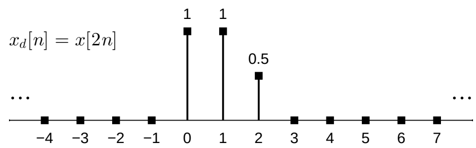
(b)



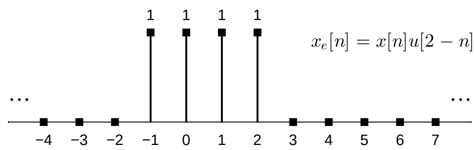
(c)



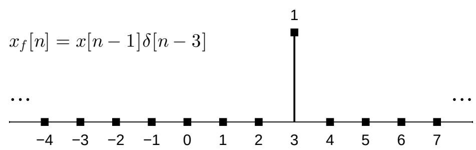
(d)



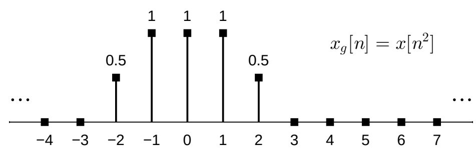
(e)



(f)



(g)



Ejercicio 7

En términos de la señal escalón: $x[n] = u[n] - u[n-11] - 1/2\,(u[n-11] - u[n-21])$.

En términos de señales impulso: $x[n] = \sum_{0}^{10} \delta[n-k] - 1/2 \sum_{11}^{20} \delta[n-k]$