

MATERIAL TEÓRICO 2015

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS

TECNÓLOGO MECÁNICO

4. FLUIDO VISCOOSO

4. FLUIDO VISCOSO

4.1. Introducción

4.1.1. Repaso

La principal diferencia entre un fluido perfecto y un fluido real, es la viscosidad de éste último. La viscosidad de un fluido es una medida de su resistencia a fluir, por lo que fluidos más viscosos (como aceites y pinturas) fluirán más lento que fluidos menos viscosos (como agua y aire).

Entre las consecuencias de la presencia de viscosidad en los fluidos, se destaca la aparición de tensiones rasantes en el seno del fluido y entre el fluido y superficies sólidas (siempre y cuando también exista un gradiente de velocidad, de lo contrario las tensiones rasantes son nulas), y la condición de adherencia a las paredes. Esta última consecuencia, refiere a que en la interfaz entre un fluido y una superficie de otro material (sólido o fluido), las partículas del fluido viscoso presentan la misma velocidad que la superficie, es decir que si la superficie está en reposo las partículas de fluido adyacentes tendrán velocidad nula.

En lo que sigue, se considerará en general un flujo que fluye por una tubería de sección circular llena, de diámetro D . Sin embargo, muchos problemas prácticos de mecánica de fluidos implican flujo en secciones transversales no circulares. Para este tipo de problemas, se define una dimensión característica de la tubería, conocida como **diámetro hidráulico**, el cual será usado de forma idéntica

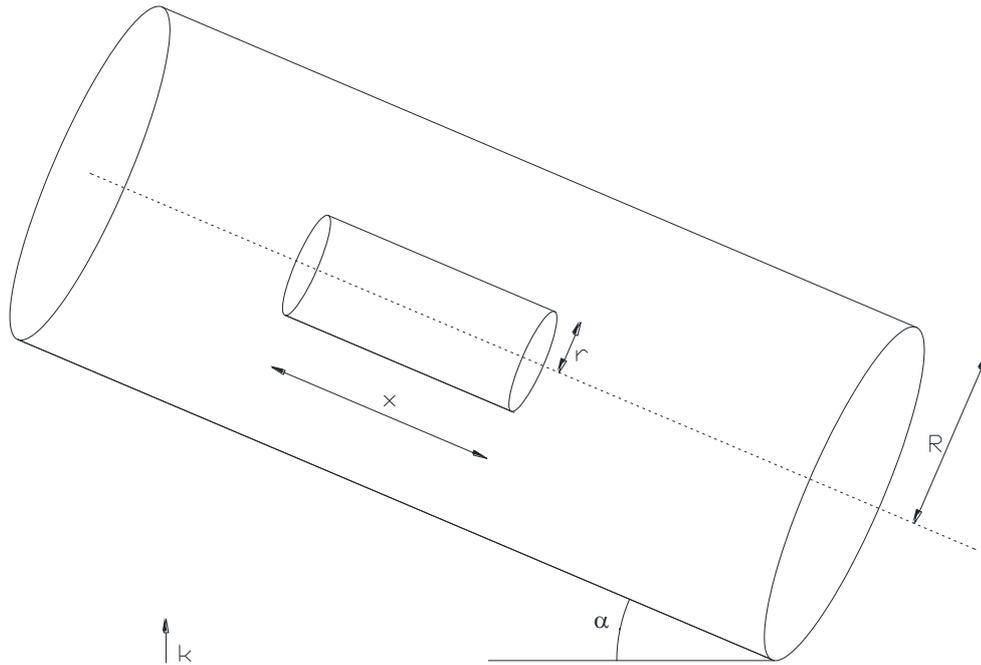
al diámetro geométrico en tuberías circulares. El diámetro hidráulico se define como $D_h = \frac{4 \cdot A_p}{P_m}$

donde A_p es el área de pasaje del flujo (calculada a partir de la geometría de la sección) y P_m el perímetro mojado (calculado como la suma de la longitud de los límites de la sección que realmente están mojados por fluido). De este modo, por ejemplo en un conducto de sección cuadrada el D_h equivale al lado del cuadrado, y en uno de sección rectangular (de lados a y b) $D_h = \frac{2ab}{a+b}$. No obstante lo recién mencionado, vale la pena destacar que en la relación entre la velocidad media en una sección y el caudal que circula a través de la misma, aparece el área real de la sección, la cual es calculada a partir de su geometría real (por ejemplo: *largo* x *ancho* si es rectangular) que difiere del resultado de $\frac{\pi \cdot D_h^2}{4}$.

4.1.2. Flujo por una tubería

Considérese un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad dinámica μ , que circula por una tubería recta de sección circular de diámetro D . Para generalizar, se tomará una tubería inclinada un ángulo α respecto al plano horizontal. Se asumirán además las siguientes hipótesis:

- i) Flujo estacionario y rectilíneo, paralelo al eje de la tubería
- ii) Simetría de revolución en torno al eje de la tubería



Trabajaremos en un sistema de coordenadas cilíndrico, en el cual el módulo de la velocidad es $u(x, r, \theta, t)$. Al considerar un movimiento estacionario, se elimina la dependencia explícita con el tiempo t .

Si el flujo es rectilíneo, el vector velocidad es colineal al eje de la tubería, por lo que $\vec{v} = u(x, r, \theta)\hat{i}$

Como el fluido es incompresible, se tiene que $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x, r, \theta)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{v} = u(r, \theta)\hat{i}$; y si además

hay simetría de revolución, la velocidad no depende del ángulo θ , por lo que $\vec{v} = u(r)\hat{i}$.

Otra consecuencia directa de que el flujo sea rectilíneo, es que en una sección transversal al flujo, la cota piezométrica es constante. Por lo tanto sólo depende de la coordenada x , o sea $z + p/\gamma = F(x)$.

Se puede ver (por ejemplo aplicando el teorema de transporte) que la aceleración de cada partícula es nula.

Se plantea aplicar la primera ecuación de balance mecánico a una porción de fluido, comprendida por un cilindro de radio r y largo x , coaxial con la tubería, y resolver su proyección según \hat{i} .

$$0 = \left[\int_D \rho \cdot \vec{g} \, dV + \int_{\partial D} (-p \hat{n} + \vec{\tau}) \, dA \right] \hat{i},$$

donde en las tapas del cilindro las tensiones rasantes son perpendiculares al versor \hat{i} y en la superficie lateral las presiones son perpendiculares al versor \hat{i} .

Resumiendo queda:

$$0 = \rho \cdot g \cdot V(D) \cdot \text{sen}(\alpha) + p(A) \cdot \pi \cdot r^2 - p(B) \cdot \pi \cdot r^2 + \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot x,$$

donde $\tau = \mu \frac{du}{dr}$, $V(D) = \pi \cdot r^2 \cdot x$, y $\text{sen}(\alpha) = \frac{z_A - z_B}{x}$ y operando resulta:

$$\frac{F(0) - F(x)}{x} = \frac{-2\mu}{\gamma} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr},$$

donde se observa que el término de la izquierda de la igualdad es una función que depende únicamente de x y el término de la derecha es una función que depende únicamente de r . Para que esta igualdad se cumpla para todos los valores posibles de x y r , la única opción es que ambos términos sean iguales a un valor constante. Llamémosle \mathbf{J} a esta constante.

Analizando la primera igualdad: $\frac{F(0) - F(x)}{x} = \mathbf{J}$, se puede interpretar a la constante \mathbf{J} como la pérdida de cota piezométrica por unidad de longitud.

Analizando la segunda igualdad: $\frac{-2\mu}{\gamma} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} = \mathbf{J}$, se puede re-escribir como $du = \frac{-\gamma}{2\mu} \cdot \mathbf{J} \cdot r dr$.

Pre-integrando en ambos lados de la igualdad, se tiene $u(r) = Cte - \frac{\gamma \cdot \mathbf{J}}{4\mu} \cdot r^2$.

Usando ahora la condición de adherencia a las paredes ($u(r = R) = 0$), se encuentra el valor de la Cte , y entonces el perfil de velocidades es

$$\vec{v} = \frac{\gamma \cdot \mathbf{J}}{4\mu} \cdot (R^2 - r^2) \hat{i}$$

La velocidad máxima se da en el eje de la tubería ($r = 0$), y vale $u_{\max} = \frac{\gamma \cdot \mathbf{J} \cdot R^2}{4\mu}$.

Se puede hallar el caudal que fluye por la tubería integrando el perfil de velocidades en toda la sección transversal:

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \iint u(r) r dr d\theta = \int_0^R \frac{\gamma \cdot \mathbf{J}}{4\mu} (R^2 - r^2) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot \mathbf{J} \cdot R^4}{8\mu}$$

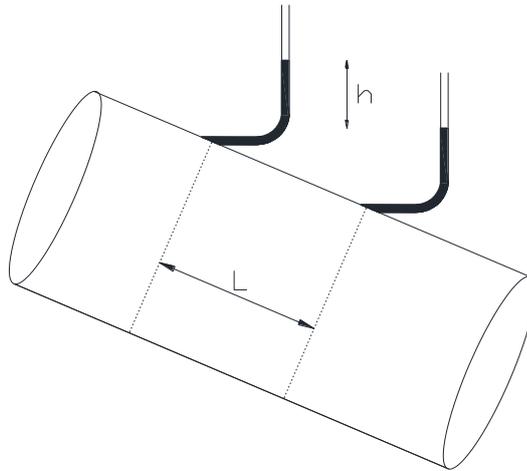
La velocidad media se define como la razón entre el caudal y el área: $u_{\text{media}} = \frac{\gamma \cdot \mathbf{J} \cdot R^2}{8\mu}$.

Se puede hallar ahora cómo varían las tensiones rasantes en la tubería, recordando que $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dr}$, se tiene que $\tau(r) = \frac{-\gamma \cdot \mathbf{J}}{2} \cdot r$. La máxima tensión se da en las paredes, y en el eje de la tubería la tensión rasante es nula.

4.1.3. Determinación experimental de \mathbf{J}

Para medir experimentalmente el valor de \mathbf{J} , basándose en su definición, alcanza con medir la cota piezométrica en dos secciones de una tubería recta separadas una distancia L (conocida), recordando que \mathbf{J} es la piezométrica en una sección menos la piezométrica en otra sección aguas abajo de la primera. Como la cota piezométrica no puede aumentar en una tubería recta de sección constante, \mathbf{J}

siempre debe tener signo positivo. Por lo tanto, si no se conoce de antemano el sentido del flujo y al plantear la ecuación se obtiene un valor de \mathbf{J} negativo, significa que el sentido del flujo es el opuesto al que se supuso al considerar las dos secciones.



En el esquema de arriba, el fluido fluye de izquierda a derecha.

4.2. Flujo Laminar y Turbulento

Se definen los siguientes números adimensionados:

$$\frac{\mathbf{J}}{u_m^2 / 2gD} = f : \text{coeficiente de fricción de Darcy.}$$

$$\frac{\rho u_m \cdot D}{\mu} = \text{Re} : \text{número de Reynolds, el cual es característico del régimen del flujo.}$$

A partir de la definición del coeficiente de fricción, se puede escribir la pérdida de carga por fricción en una tubería recta de sección constante (diferencia de cotas piezométricas), lo que se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$\xi_f = \mathbf{J} \cdot L = f \frac{L}{D} \cdot \frac{u_m^2}{2g},$$

la cual es válida para todos los regímenes de flujo.

Retomando el resultado obtenido en 4.1.2:

$$u_{media} = \frac{\gamma \cdot \mathbf{J} \cdot R^2}{8\mu} \Rightarrow \frac{\mathbf{J}}{u_m^2 / 2gD} = \frac{64 \cdot \mu}{u_m \cdot D \cdot \rho}$$

La última igualdad se conoce con el nombre de ecuación de Hagen-Poiseuille.

Con las anteriores definiciones, la ecuación de Hagen-Poiseuille, puede escribirse también como

$$f = \frac{64}{Re}.$$

Se probó experimentalmente, que el resultado recién obtenido no se aplica para todos los regímenes de flujo (todo el rango de números de Reynolds), sino sólo para $Re < 2000$.

Los flujos que presentan un valor de $Re < 2000$, se dice que presentan un **régimen laminar** en el cual el flujo es lento y uniforme. Tal es el caso del utilizado en la sección 4.1.2.

Para $Re > 5000$ se dice que el régimen es **turbulento**, y el flujo es rápido y caótico.

Por último la zona comprendida entre 2000 y 5000 se conoce como la **zona de transición** y no puede predecirse el comportamiento del flujo.

El número de Reynolds representa la relación entre la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido, y la fuerza viscosa. Así, en flujos con elevada velocidad o baja viscosidad o ambas, Re es alto y el régimen será turbulento; mientras que en flujos con baja velocidad o alta viscosidad o ambas, Re es bajo y el régimen será laminar.

4.3. Pérdidas de carga distribuida en flujo turbulento

Para flujos turbulentos, no se ha encontrado una ecuación teórica para el cálculo de la pérdida de carga. En estos casos, los cálculos se basan en resultados experimentales.

Se intentará, en base a experimentos, obtener la forma en la que varía el coeficiente de fricción, en función de todos los parámetros que intervienen en el problema. Comencemos enumerándolos: Fluido (densidad y viscosidad); velocidad media del flujo; diámetro de la tubería; material de la tubería (rugosidad).

Tenemos que $f = F(\rho, \mu, v, D, \varepsilon)$, es decir que el coeficiente de fricción depende de 5 variables independientes.

Trataremos de reducir la cantidad de variables, para que sea más fácil hallar la función. Para esto nos basamos en el **teorema de Buckingham (o teorema PI)**, que expresa lo siguiente:

Si tenemos una función que relaciona una variable dependiente con k variables independientes, y estamos trabajando en un sistema de unidades de dimensión r , la función se puede re-escribir en términos de $(k-r)$ variables independientes, las cuales además serán adimensionadas (sin unidades).

Aplicando el **teorema π** al caso del coeficiente de fricción, $k=5$, y el sistema de unidades es el LMT (longitud, masa, tiempo) o MKS (metros, kilos, segundos), por lo que $r=3$. Entonces tendríamos una función con $k-r=2$ variables independientes.

Para encontrar estas variables, primero debemos definir 3 variables (del conjunto de las 5) que definan una base linealmente independiente. Se propone seleccionar (ρ, v, D) , cuyas dimensiones representan al espacio del sistema de unidades (LMT) y son independientes.

Luego, a partir de las variables, se definen números adimensionados de la siguiente forma:

$$\pi_x = \frac{X}{\rho^a v^b D^c},$$

donde X es la variable y a , b y c son exponentes que se deben hallar para que el número π_x sea adimensionado. No es objeto del presente curso dedicarse a encontrar estos exponentes, lo cual igualmente no es una tarea difícil.

De esta manera, se tienen los siguientes números adimensionados:

$$\pi_\rho = 1$$

$$\pi_v = 1$$

$$\pi_D = 1$$

$$\pi_\mu = \frac{\mu}{\rho \cdot v \cdot D} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (\text{inverso del número de Reynolds})$$

$$\pi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{D} \quad (\text{rugosidad relativa})$$

$$\pi_f = f \quad (\text{ya es un n}^\circ \text{ adimensionado})$$

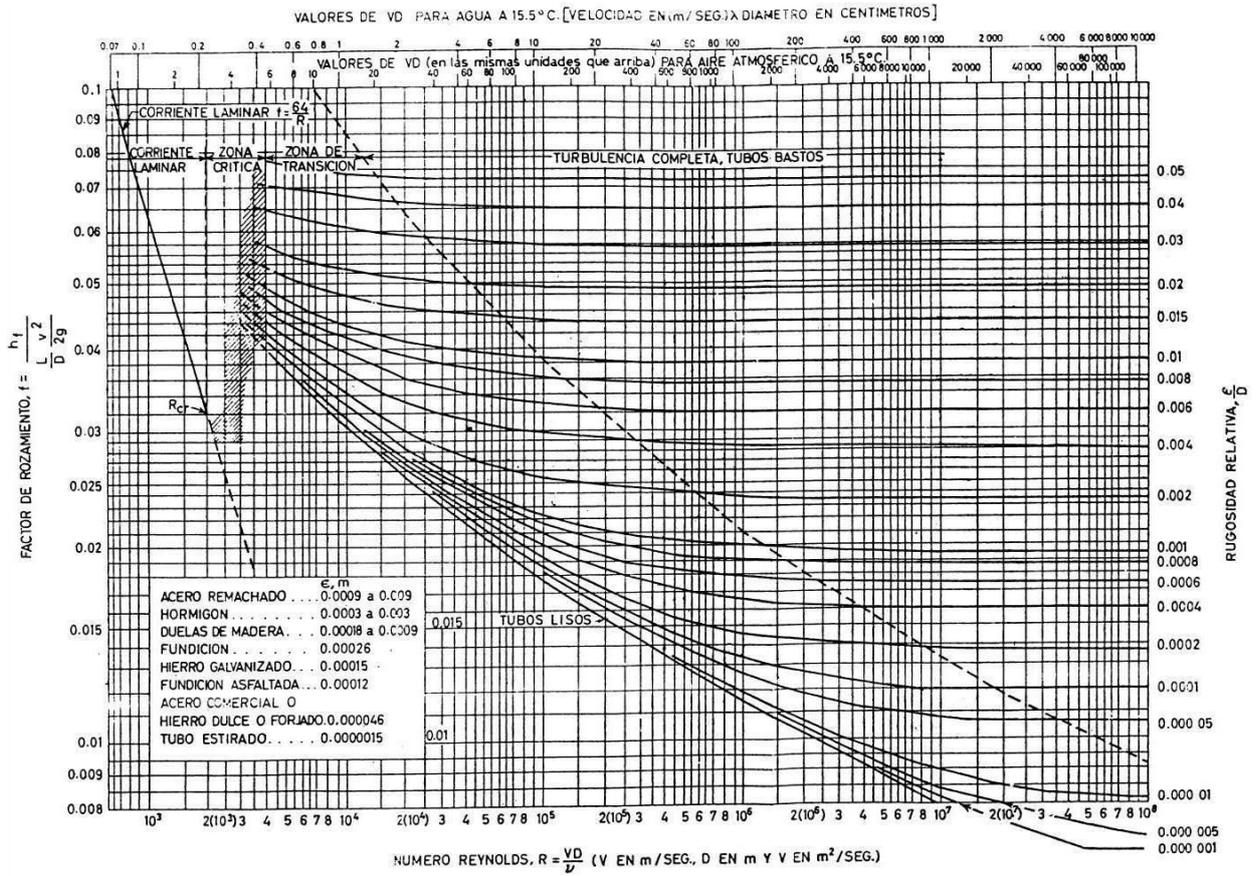
La función entonces queda: $f = F'(1,1,1, 1/\text{Re}, \varepsilon/D) = F'(1/\text{Re}, \varepsilon/D)$, por lo que el coeficiente de fricción depende únicamente del inverso del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de la cañería.

Gracias al resultado anterior, se han llevado a cabo varias experiencias (Nikuradse ensayó varios tamaños de caños cubiertos interiormente con arena de distinta granulometría – generando así una rugosidad conocida) que han permitido proponer ecuaciones empíricas que se ajustan a los datos experimentales. La más completa de ellas y que se ajusta a todos los flujos turbulentos en tuberías, es la fórmula de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log_{10} \left[\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right]$$

la cual presenta el inconveniente que define al coeficiente de fricción en forma implícita y para encontrar el valor de f se debe recurrir al método iterativo o ensayo-y-error.

Para solucionar este problema, se confeccionó un ábaco con las curvas $f(\text{Re})$ correspondientes a varias rugosidades relativas (ábaco de Moody). En el gráfico, las abscisas corresponden a valores del número de Reynolds y las ordenadas a valores del coeficiente de fricción, mientras que las curvas están parametrizadas en valores de rugosidad relativa. Se observa a la izquierda del gráfico la región de flujo laminar, que corresponde a una relación lineal. Esta linealidad se debe a que el gráfico está expresado en escalas logarítmicas (recordar que la relación en este caso era hiperbólica).



Otras fórmulas, algunas de más fácil aplicación y otras que son válidas sólo para algunos regímenes de flujo, se listan a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad (\text{válida } 4 \times 10^3 < Re < 10^8, \text{ Haaland})$$

$$f = 0.3164 \cdot Re^{-0.25} \quad (\text{tubos lisos y } Re \leq 10^5, \text{ Blasius})$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log_{10} \left[\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{f}} \right] \quad (\text{tubos lisos y todos los } Re \text{ Prandtl y Von Karman})$$

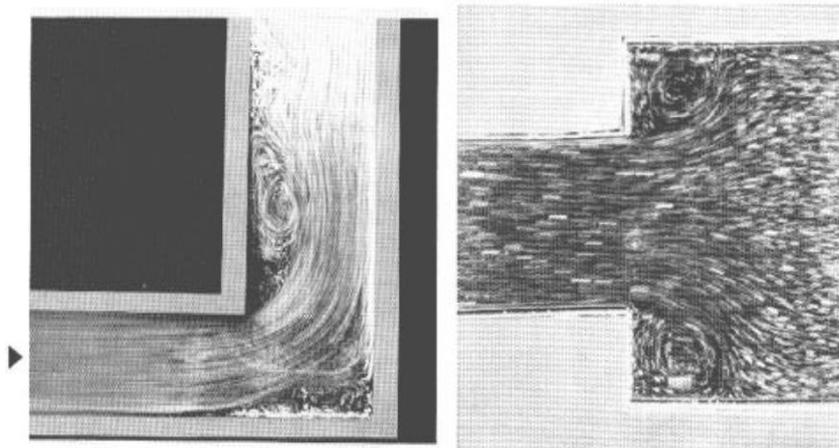
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log_{10} \left[\frac{\epsilon}{3.71D} \right] \quad (\text{tubos rugosos, Nikuradse})$$

Observando el ábaco de Moody, se destaca una zona a la derecha donde el valor del coeficiente de fricción ya no depende del número de Reynolds, para una tubería dada (para cada rugosidad relativa, el valor de f es constante). Esta zona se conoce con el nombre de turbulencia completa o totalmente

desarrollada. En estos casos la pérdida de carga es proporcional a v^2 y se suele escribir de la forma $\xi = KQ^2$

4.4. Pérdidas de carga localizadas

Además de las pérdidas de carga por fricción, en un circuito de tuberías existen otras pérdidas de carga, debidas a fenómenos de turbulencia, como cambios bruscos en la dirección del flujo. Los mismos pueden ser provocados por accesorios insertos en la tubería, como válvulas, codos, “tes”, expansiones, reducciones, filtros, entrada a una tubería desde un tanque, y otros tipos de accesorios.



Pérdida de carga en codo recto

Pérdida de carga en expansión abrupta

Se han desarrollado algunas fórmulas para el cálculo de estas pérdidas, en algunos accesorios simples, como por ejemplo la fórmula de Borda para pérdida de carga en una expansión:

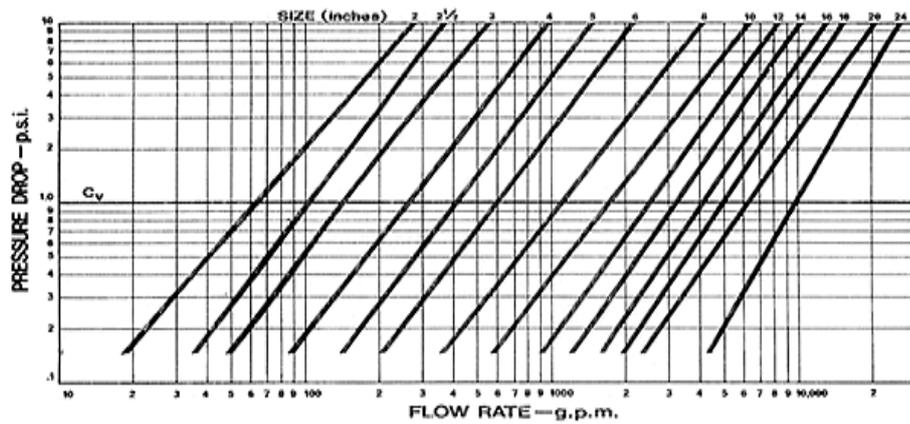
$$\Delta H_e = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \text{ donde } v_1 \text{ y } v_2 \text{ son las velocidades medias antes y después de la expansión.}$$

Pero en general, la pérdida de carga en un accesorio se expresa de la forma $\xi_l = k \frac{v^2}{2g}$, donde v es la velocidad media en la tubería donde está inserto el accesorio, y k es un coeficiente adimensionado que depende de la geometría, material y tamaño del accesorio, pero en general es independiente de la velocidad del flujo a través de él.

La salida desde una tubería a un tanque de grandes dimensiones es un caso de expansión brusca, donde en la fórmula de Borda $v_2 = 0$, de lo que se deduce un coeficiente $k=1$.

Adicionalmente, siempre se va a tener una pérdida de carga localizada en la entrada a la cañería, cuyo coeficiente depende de la forma de la entrada (pudiendo tomar valores entre **0.05** para entradas redondeadas y **0.5** para entradas rectas).

Para la mayoría de accesorios, se presentan valores experimentales del coeficiente k . Un caso particular son las gráficas de caída de presión en válvulas brindadas por los fabricantes de las mismas.



Otra forma de expresar la pérdida de carga provocada por un accesorio es a través de la definición de una longitud equivalente del accesorio, que representaría el largo de una tubería de cierto material y diámetro, necesario para provocar la misma pérdida de carga que el accesorio: $k = \frac{f_T L_{eq}}{D}$. En esta fórmula L_{eq} es la longitud equivalente, D es el diámetro de cañería en el que está inserto el accesorio, y f_T es el coeficiente de fricción de la tubería donde está inserto el accesorio tomado en la zona de turbulencia completa. Algunos fabricantes brindan valores de longitud equivalente en lugar de coeficientes de pérdida de carga.

En la siguiente tabla se resumen algunos valores de coeficientes k y longitudes equivalentes.

Accesorio	k	L_{eq}/D
Válvula globo (totalmente abierta)	10	350
Válvula en ángulo recto (totalmente abierta)	5	175
Válvula de seguridad (totalmente abierta)	2.5	-
Válvula de retención (totalmente abierta)	2	135
Válvula de compuerta (totalmente abierta)	0.2	13
Válvula de compuerta (abierta 3/4)	1.15	35
Válvula de compuerta (abierta 1/2)	5.6	160
Válvula de compuerta (abierta 1/4)	24	900
Válvula de mariposa (totalmente abierta)	-	40
T por salida lateral	1.8	67
Codo a 90° de radio corto (con bridas)	0.9	32
Codo a 90° de radio normal (con bridas)	0.75	27
Codo a 90° de radio grande (con bridas)	0.6	20
Codo a 45° de radio corto (con bridas)	0.45	-
Codo a 45° de radio normal (con bridas)	0.4	-
Codo a 45° de radio grande (con bridas)	0.35	-

Fuente: <http://www.miliarium.com/Prontuario/MedioAmbiente/Aguas/PerdidaCarga.asp>

4.5. Bombas y turbinas

4.5.1. Bombas

Las bombas (para líquidos) y ventiladores (para gases incompresibles) son las máquinas utilizadas para incrementar la carga hidráulica de los fluidos (y por consiguiente hacer circular un caudal). Se utiliza energía mecánica de un eje que gira y se transforma en energía hidráulica en el fluido. En esta conversión existen pérdidas de energía, debido a tres factores: fugas o recirculación de fluido; rozamiento en los cojinetes del eje; pérdidas de carga hidráulica del fluido mientras atraviesa la bomba (o ventilador). Debido a esto, la energía consumida por la máquina siempre es mayor que la energía hidráulica útil transferida al fluido. Se define el rendimiento de la bomba (o ventilador) como el cociente entre la potencia hidráulica útil y la potencia consumida en punta de eje: $\eta = \frac{P_{hidráulica}}{P_{consumida}}$

En estas máquinas se busca obtener la mayor potencia hidráulica consumiendo la menor cantidad de potencia mecánica, por lo que se desean rendimientos elevados.

La potencia hidráulica útil se define como: $P_{hidráulica} = \gamma \cdot Q \cdot \Delta H$, donde γ es el peso específico del fluido, Q es el caudal que impulsa la máquina y ΔH es el incremento de carga del fluido al pasar por la máquina.

En este curso las bombas y ventiladores simplemente se visualizan como un accesorio inserto en la tubería, que eleva la carga del flujo en forma puntual. Se pueden ver como una pérdida de carga localizada con signo negativo.

4.5.2. Turbinas

Las turbinas, al contrario de las bombas, se utilizan para extraer energía (carga hidráulica) de un fluido y convertirla en energía mecánica en un eje. También existen pérdidas de energía y se define el rendimiento de la turbina como el cociente entre la potencia generada en punta de eje y la potencia hidráulica extraída del fluido: $\eta = \frac{P_{generada}}{P_{hidráulica}}$.

En estas máquinas se busca generar la mayor potencia mecánica a expensas del consumo necesario de potencia hidráulica, por lo que se desean rendimientos elevados.

En este curso las turbinas simplemente se visualizan como un accesorio inserto en la tubería, que baja la carga del flujo en forma puntual. Se pueden ver como una pérdida de carga localizada.

4.6. Sistemas de tuberías en serie y en paralelo

4.6.1. Sistemas en serie

Comprenden este tipo de sistemas, dos o más tuberías de distinto diámetro y/o material, unidas una a continuación de la otra. Por cada tubería circula el mismo caudal, y la pérdida de carga total del sistema es la suma de cada una de las pérdidas de carga por cada tramo. Vale la pena destacar, que la existencia de un cambio de diámetro interior o de material de la tubería, significará un cambio en el valor del coeficiente de fricción y por eso la pérdida de carga en cada tramo debe calcularse por separado.

4.6.2. Sistemas en paralelo

Se refiere a sistemas en los que un tramo de tubería se bifurca en dos o más tramos de tubería de igual o distinto diámetro y/o material, para luego unirse nuevamente en un único tramo, o continuar separadas. En estos sistemas, el caudal que circula por la tubería antes de la bifurcación, se divide entre los distintos tramos, de acuerdo a la pérdida de carga impuesta por cada uno (intuitivamente es fácil de ver que circulará mayor caudal por los tramos de menor rugosidad, mayor diámetro y con menor pérdida de carga localizada).

Si todos los tramos vuelven a unirse en uno sólo, puede afirmarse que la pérdida de carga por cada tramo es la misma (ya que el punto antes de la bifurcación y el punto inmediatamente después de la unión son comunes a todos los tramos).

Para analizar este tipo de sistemas, puede hacerse una analogía con los circuitos eléctricos en paralelo. El caudal que circula es análogo a la corriente eléctrica, el coeficiente de fricción es análogo a la resistencia eléctrica, y la pérdida de carga hidráulica es análoga a la caída de potencial. Así, circulará más caudal (o corriente) por los tramos con menores valores de coeficientes de fricción (o resistencia); y la pérdida de carga (o caída de potencial) es idéntica por cada tramo o rama del circuito. No se acostumbra usar el concepto de resistencia equivalente del circuito en paralelo.

4.7. Problemas típicos de tuberías

No siempre se conocen todos los datos de la tubería y del flujo, de modo de poder calcular directamente la pérdida de carga. Más bien, este es sólo uno de los tres tipos de problemas que se pueden presentar. Cuando no se conoce el caudal que circula (y por ende la velocidad media) o el diámetro de la tubería, no se podrá calcular de forma directa el coeficiente de fricción f .

Como se ha visto hasta ahora, en el diseño o análisis de un sistema de tuberías se tienen 6 parámetros involucrados:

1. Las pérdidas (o ganancias) de carga
2. El caudal o velocidad del fluido
3. El tamaño (diámetro) de la tubería
4. El largo de la tubería
5. La rugosidad de la tubería
6. Propiedades del fluido (densidad y viscosidad)

En general, los problemas implican determinar uno de los primeros tres parámetros, mientras que los demás son conocidos. Vale aclarar que los últimos tres parámetros se suponen siempre conocidos.

4.7.1. Problemas de cálculo de pérdida de carga (o directos)

La resolución de este tipo de problemas, no difiere en mucho de lo que se ha venido viendo en las secciones anteriores, con la excepción de que en general existirán todo tipo de pérdidas y/o ganancias de carga hidráulica en el sistema, que deberán ser todas tenidas en cuenta.

4.7.2. Problemas de cálculo de caudal

Si no se conoce el caudal de circulación, por más que se conozca el diámetro de la tubería, no se sabe la velocidad del flujo. Por lo tanto no se puede calcular el número de Reynolds, ya que depende de la velocidad. Y entonces no se puede hallar el coeficiente de fricción f , y como las pérdidas de carga distribuidas dependen tanto de f como de v , éstas no pueden calcularse directamente.

Para superar estas dificultades, se utilizará un procedimiento denominado *iteración*. Es un método de solución del tipo *ensayo-y-error*, en el cual se asume un valor de prueba de la velocidad para poder hallar un valor de f y de la ecuación de pérdida de carga en la tubería poder despejar y calcular la velocidad. Éste último valor se compara con el valor de velocidad de prueba, y si son idénticos entonces se encontró la solución, pero si son diferentes se debe repetir el ciclo descrito comenzando con el valor de velocidad calculado en el último paso. Este procedimiento debe repetirse hasta que el valor calculado y el valor de prueba sean el mismo (considerando cifras significativas adecuadas).

La cantidad de pasos necesarios para alcanzar la solución, depende del primer valor de prueba asumido. En general en problemas de flujo de líquidos, es razonable asumir velocidades medias dentro de tuberías entre 1 m/s y 3 m/s, mientras que en el flujo de gases se pueden admitir velocidades entre 5 m/s y 15 m/s. Estos valores son deseados para que, por los límites superiores, no tener pérdidas de carga excesivas ni ruidos y vibraciones y evitar erosión de las paredes de la tubería, y por los límites inferiores, que no se depositen sedimentos en las paredes de las tuberías.

4.7.3. Problemas de cálculo de diámetro (o de diseño)

En estos problemas, al no conocer el diámetro de la tubería tampoco se puede calcular la velocidad del flujo, y entonces tampoco el número de Reynolds. Por consiguiente no puede hallarse directamente el coeficiente de fricción (que además depende de la rugosidad relativa ε/D) y por tanto tampoco las pérdidas de carga en la tubería. Para solucionar este tipo de problemas se recurre al método iterativo, aunque difiere un poco del visto antes.

Para explicar la resolución, se comienza con el más simple de este tipo de problemas, en los cuales sólo se tienen pérdidas distribuidas. En estos casos, al escribir la velocidad en términos del caudal y del diámetro de la tubería, la pérdida de carga es inversamente proporcional al diámetro elevado a la quinta. De esta ecuación se despeja el diámetro. Luego, se asume un valor de prueba para el diámetro, con el cual se calcula ε/D y Re para poder hallar el coeficiente de fricción y entonces calcular el diámetro con la ecuación antes despejada. Éste último valor se compara con el valor de diámetro de prueba, y si son idénticos entonces se encontró la solución, pero si son diferentes se debe repetir el ciclo descrito comenzando con el valor de diámetro calculado en el último paso. Este procedimiento debe repetirse hasta que el valor calculado y el valor de prueba sean el mismo (considerando cifras significativas adecuadas).

Nuevamente aquí, la cantidad de pasos necesarios para alcanzar la solución, depende del primer valor de prueba asumido. No hay límites inferiores ni superiores para los diámetros (salvo la disponibilidad en el mercado de distintos tamaños de tuberías), por lo que el primer valor de prueba para el diámetro suele tomarse para obtener una velocidad media en la tubería de entre 1 m/s y 3 m/s (en el caso de líquidos) y entre 5 m/s y 15 m/s (en el caso de gases).

4.8. Fuerzas sobre cuerpos sumergidos

Intuitivamente, y respaldado por la experiencia, uno se puede imaginar que un fluido viscoso que circula alrededor de un cuerpo en reposo sumergido en él, impondrá una fuerza sobre el cuerpo. Quizás la componente de la fuerza más fácil de imaginarse es la resultante en la misma dirección del movimiento del fluido, conocida como fuerza de arrastre. Pero dependiendo del perfil aerodinámico del cuerpo, también se va a tener presente una componente de la fuerza en la dirección perpendicular al movimiento del fluido, conocida como fuerza de sustentación, que es la responsable entre otras cosas, de que los aviones puedan volar. Este análisis también es válido en el caso de un cuerpo moviéndose en el seno de un fluido viscoso en reposo.

4.8.1. Fuerza de arrastre

Para hallar esta componente de la fuerza, utilizaremos nuevamente el teorema pi y el análisis dimensional. Primero enumeramos las variables que intervienen en el problema físico: tamaño del cuerpo; velocidad del fluido; densidad del fluido; viscosidad del fluido.

Tenemos que la fuerza de arrastre (o “drag”) sobre un cuerpo liso (no estudiaremos el efecto de la rugosidad) depende de 4 variables: $F_D = f(\rho, \mu, v, D)$, donde D es una magnitud geométrica característica del cuerpo (como podría ser el diámetro en el caso de una esfera).

Aplicando el teorema pi, $n=4$, y el sistema de unidades es el LMT (longitud, masa, tiempo) o MKS (metros, kilos, segundos), por lo que $p=3$. Entonces tendríamos una función con $n-p = 1$ variable independiente.

Para encontrar estas variables, primero debemos definir 3 variables (del conjunto de las 5) que definan una base linealmente independiente. Se propone seleccionar (ρ, v, D) , cuyas dimensiones representan al espacio del sistema de unidades (LMT) y son independientes.

Luego, a partir de las variables, se definen números adimensionados de la siguiente forma:

$$\pi_x = \frac{X}{\rho^a v^b D^c},$$

donde X es la variable y a , b y c son exponentes que se deben hallar para que el número π_x sea adimensionado. No es objeto del presente curso dedicarse a encontrar estos exponentes, lo cual igualmente no es una tarea difícil.

De esta manera, se tienen los siguientes números adimensionados:

$$\pi_\rho = 1$$

$$\pi_v = 1$$

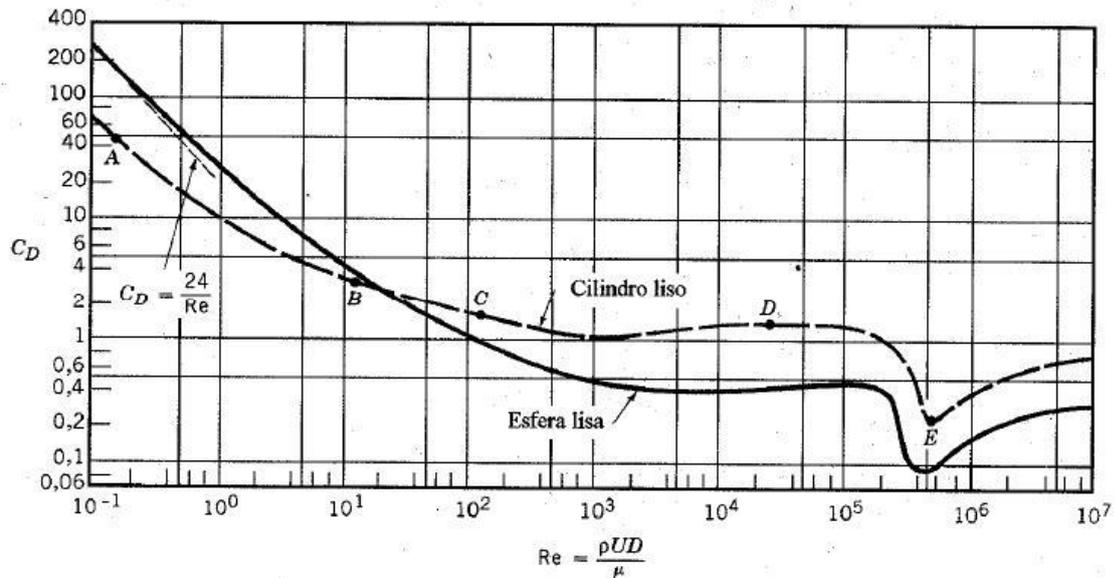
$$\pi_D = 1$$

$$\pi_\mu = \frac{\mu}{\rho \cdot v \cdot D} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (\text{inverso del número de Reynolds})$$

$$\pi_{F_D} = \frac{F_D}{\rho D^2 v^2} \quad (\text{coeficiente de arrastre})$$

La función entonces queda: $\frac{F_D}{\rho D^2 v^2} = f'(1,1,1, \frac{1}{Re}) = f'(\frac{1}{Re})$, por lo que la fuerza de arrastre sobre

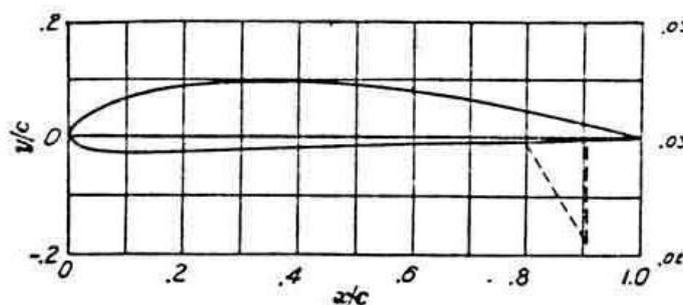
un cuerpo liso se puede calcular como: $F_D = f''(Re) \rho D^2 v^2$, donde $f''(Re) = C_D$ es el coeficiente de arrastre que se halla experimentalmente para cada cuerpo particular. Así por ejemplo, se muestran abajo las curvas para hallar el valor de C_D correspondientes a una esfera lisa y a un cilindro liso. Para el caso de la esfera lisa y flujo laminar, se halló una fórmula teórica para el cálculo de C_D , conocida como ley de Stokes: $C_D = 24/Re$, pero que sólo es válida para $Re < 0.25$.

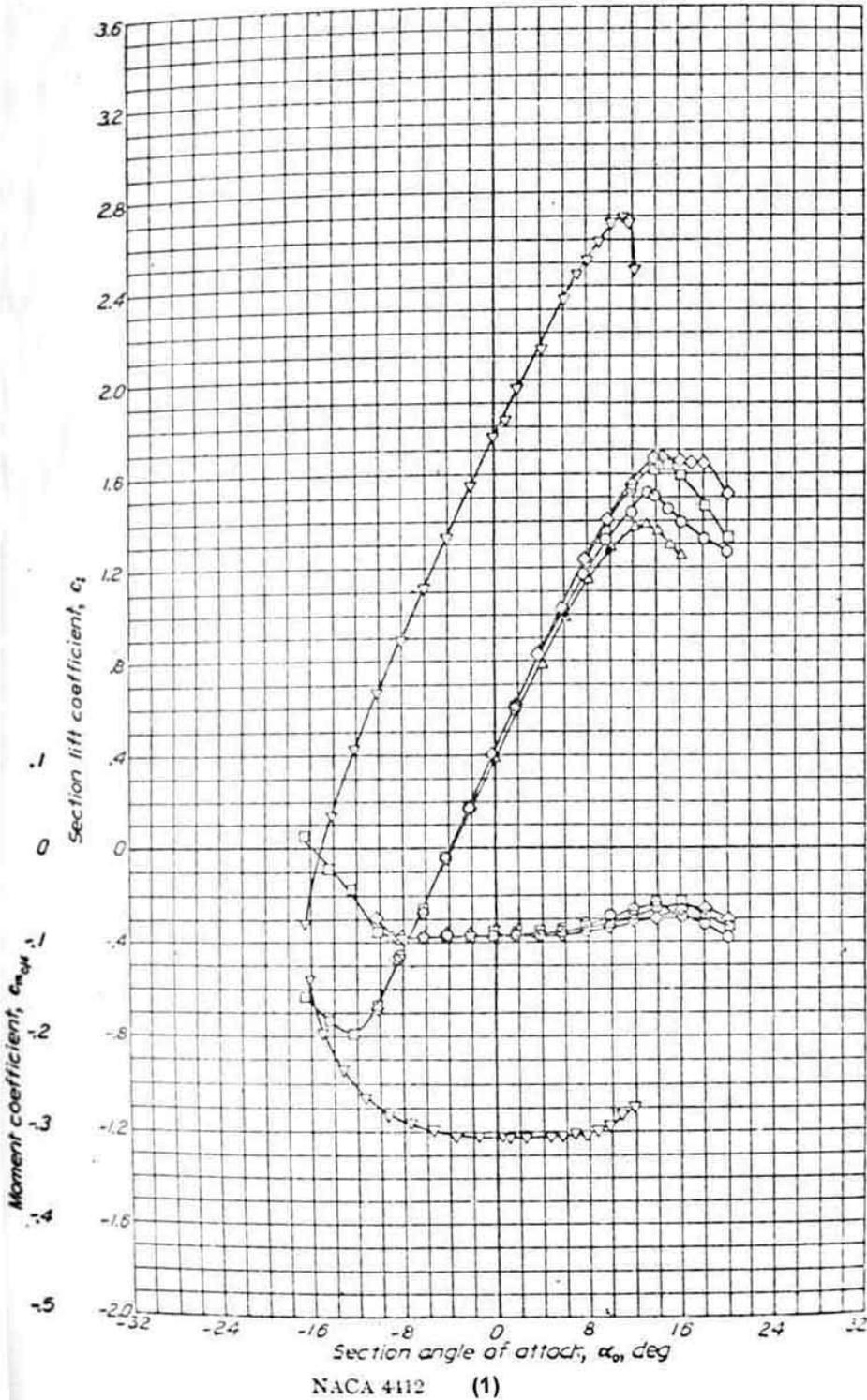


4.8.1. Fuerza de sustentación

Se puede aplicar el mismo procedimiento anterior, y se llega a que la fuerza de sustentación (o “lift”) sobre un cuerpo liso se expresa como: $F_L = f''(Re) \rho D^2 v^2$, donde $f''(Re) = C_L$ es el coeficiente de sustentación que también se halla experimentalmente para cada cuerpo particular.

Los cuerpos más estudiados son las alas de los aviones, las palas de ventiladores y bombas axiales y las palas de turbinas eólicas y turbinas hidráulicas axiales. Los valores de C_L , se presentan en general en forma de curvas en función del número de Reynolds y del ángulo que forma la dirección del flujo medio con el perfil del álabe o pala. Abajo se muestra un perfil particular de pala, y a continuación se presenta una gráfica con las curvas $C_L(\alpha)$ para distintos valores de Re .





BIBLIOGRAFÍA

Robert L. Mott, 1996. MECANICA DE FLUIDOS APLICADA, 4ª ED. Prentice Hall.

Joseph B. Franzini y E. John Finnemore, 1999. MECANICA DE FLUIDOS con aplicaciones en ingeniería, 9ª ED. Mc Graw Hill.

Bruce Munson, Donald Young y Theodore Okiishi, 1999. FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS. Limusa-Wiley.