MATERIAL TEÓRICO 2015

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS

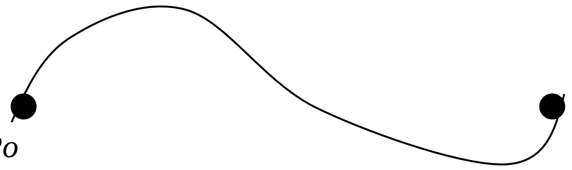
TECNÓLOGO MECÁNICO

3.HIDRODINÁMICA

3. HIDRODINÁMICA

3.1. Cinemática

3.1.1. Cinemática del punto



En la figura se observan dos posiciones ocupadas por una misma partícula, en distintos instantes de tiempo. La línea que conecta ambas posiciones es la trayectoria de la partícula, la cual formalmente se define como $\Im = \{P(t) \quad \forall t \in \Re\}$. Un concepto similar, es el de movimiento de la partícula, que es una ley o función que a cada instante *t* le asocia el vector posición $P(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$.

La velocidad de la partícula en el instante *t* se calcula (en coordenadas cartesianas) como

$$\vec{v}(P(t),t) = \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \left\{\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right\} = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$$

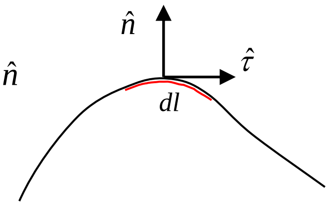
Se destaca que el vector velocidad $\vec{v}(P(t),t)$ es tangente a la trayectoria en el punto *P(t)*. Se puede escribir $\vec{v}(P(t),t) = v(P(t),t)\hat{\tau}$, donde $\hat{\tau}$ es el versor tangente a la trayectoria en el punto *P* y *v* es el módulo del vector velocidad.

Del mismo modo se define el vector aceleración de la partícula como:

$$\vec{a}(P(t),t) = \frac{d\vec{v}(P(t),t)}{dt} = \frac{d^2(P(t))}{dt^2} = \left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right\} = \{\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\}$$

Se presta atención a que el versor $\hat{\tau}$ no es constante, por lo que la derivación anterior resulta:

$$\vec{a}(P(t),t) = \frac{d(v(P(t),t)\hat{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = a_t\hat{\tau} + a_n\hat{n} = \dot{v}\hat{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}$$

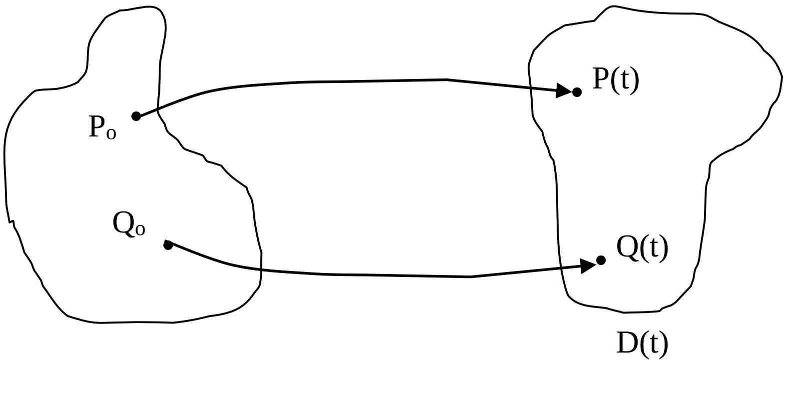


$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{\tau}}{dl}}_{1/R_c\,\hat{n}} \cdot \underbrace{\frac{dl}{dt}}_{v} = \frac{v}{R_c}\hat{n}$$

dl: diferencial longitud de arco
R_c: radio de curvatura

3.1.2. Cinemática de los fluidos

Estudiar la cinemática de una porción de fluido es equivalente a estudiar la cinemática de las infinitas partículas que la integran.



La porción de fluido que en el instante de referencia ocupa el volumen D_o, ocupa en el instante t el volumen D(t). Las partículas que conforman D_o son las mismas que conforman D(t), por lo que la masa de ambas regiones es idéntica.

$\vec{v}(P(t),t)$ y $\vec{a}(P(t),t)$ son el campo de velocidades y el campo de aceleraciones en el instante *t*, mientras que $\vec{v}(P_o,t)$ y $\vec{a}(P_o,t)$ son la velocidad y aceleración (en el instante *t*) de la partícula que en el instante inicial ocupaba la posición P_o.

Derivada total de una magnitud puntual: Si se mide una magnitud con un instrumento que siga a la partícula a lo largo de su movimiento y se calcula (en el entorno de cierto instante) la variación en el tiempo de dicha medición, se obtiene la derivada total en el tiempo.

$$\frac{d\varphi(P(t),t)}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{dP}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Derivada local (o parcial) de una magnitud puntual: Si se mide una magnitud con un instrumento fijo en el espacio y se calcula (en el entorno de cierto instante) la variación en el tiempo de dicha medición, se obtiene la derivada local en el tiempo.

$$\frac{\partial\varphi(P(t),t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Relación entre derivada total y derivada local:

$$\frac{d\varphi(P(t),t)}{dt} = \frac{\partial\varphi(P(t),t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi(P(t),t)\cdot\vec{v}(P(t),t)$$

El término $\vec{\nabla}\varphi(P(t),t)\cdot\vec{v}(P(t),t)$ expresa la variación en el tiempo de la magnitud φ por el único hecho de que la partícula, en su movimiento, atraviesa zonas con diferentes valores de φ. Por lo dicho a este término se le llama "término de transporte".

Magnitud global y Teorema de Transporte

Una magnitud global, es una magnitud que toma valores para distintas porciones o volúmenes de control de un fluido, y se calculan integrando cierta magnitud puntual en todo el volumen.

$$\Psi(D(t),t)=\int_{D(t)}\varphi(P(t),t)dV$$

Entonces, las derivadas total y local se expresan así: $\dfrac{d\Psi(D(t),t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{D(t)}\varphi(P(t),t)dV$

$$\frac{\partial\Psi(D(t),t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{D(t)}\varphi(P(t),t)dV$$

La relación entre la derivada total y la derivada local, se llama Teorema de Transporte:

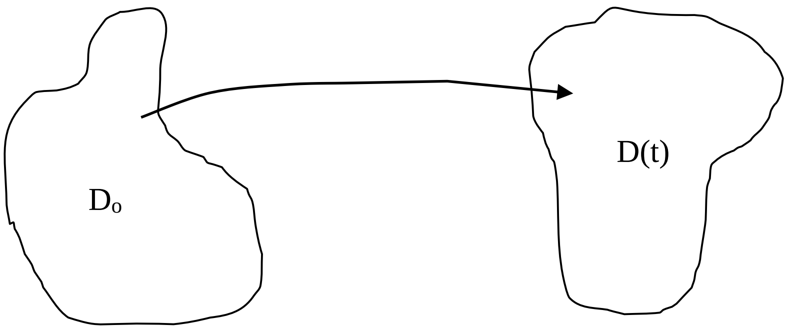
$$\frac{d\Psi(D(t),t)}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{D(t)}\varphi(P(t),t)dV+\int_{\partial D(t)}\varphi(P(t),t)\vec{v}\bullet\hat{n}dV$$

donde el último término es el término de transporte o flujo de la magnitud φ a través de la frontera del volumen de control.

Movimiento estacionario (ó estable en el tiempo)

Si todas las magnitudes que se pueden medir y atribuir a una porción de fluido en movimiento, tienen derivada local nula, entonces se dice que el movimiento es estacionario. En la práctica basta con verificar que la velocidad de las partículas tengan derivada local nula, para afirmar que el movimiento es estacionario.
Es equivalente a decir que si se mide una magnitud con un sensor fijo en el espacio, todas las partículas de fluido que pasen por el sensor presentarán el mismo valor de la magnitud (aunque cada partícula pueda presentar valores variables de la magnitud a lo largo de su trayectoria).

3.1.3. Ecuación de continuidad o balance de masa



Si el volumen que ocupa una porción de fluido en un instante inicial D_o, es igual al volumen que ocupa la misma porción de fluido en un instante t cualquiera D(t), se dice que el flujo es incompresible.

Velocidad de dilatación: $\dot{V}(D(t)) = \dfrac{dV(D(t))}{dt} = \oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$

Si $\dot{V}$ =0, el flujo es incompresible.
Si $\dot{V}$ >0, el flujo es de expansión.
Si $\dot{V}$ <0, el flujo es de compresión.

Si la misma integral, se calcula sobre una superficie abierta *S*, se obtiene el Flujo Volumétrico o Caudal: $Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$. Del mismo modo se obtiene el Flujo Másico como $\dot{m} = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$.

Teorema de la divergencia: $\oint_{\partial D} \vec{X} \cdot \hat{n}\, dA = \int_D \nabla \cdot \vec{X}\, dV$

Dado un campo vectorial en coordenadas cartesianas $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, la divergencia de dicho campo es $\nabla \cdot \vec{X} = \dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{\partial x_2}{\partial y} + \dfrac{\partial x_3}{\partial z}$.

Aplicando el teorema anterior, la condición de flujo incompresible se cumple si $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Se puede aplicar el teorema de transporte a la masa de un volumen de fluido ($M(D(t),t) = \int\limits_{D(t)} \rho(P(t),t) dV$):

$\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_{D(t)} \rho\, dV + \int\limits_{\partial D(t)} \rho \vec{v} \bullet \hat{n}\, dV$, tiene que ser igual a cero ya que la masa no se crea ni se destruye.

O sea, si tenemos una región de fluido impermeable (que no salgan ni entren partículas a él) en movimiento, la masa contenida en dicho volumen no puede variar. Y si estamos analizando una región de fluido quieta en el espacio pero permeable (pueden ingresar y/o salir partículas), entonces la variación de masa dentro de dicha región es igual y opuesta al flujo neto de masa a través de su frontera (si el movimiento es estacionario, no hay variación local de la cantidad de masa en la región D, y por lo tanto la cantidad de masa que ingresa debe ser igual a la que sale de la región D).

3.2. Ecuación de Bernoulli

En el flujo de un fluido, sería interesante poder calcular ciertos parámetros, como son la velocidad o la presión en un punto del fluido. Se introduce la hipótesis de fluido perfecto (un fluido sin viscosidad e incompresible) para facilitar los cálculos. Más adelante se levantará esta hipótesis al trabajar con fluidos reales. Con la hipótesis de fluido perfecto, el vector tensión en cada punto es puramente normal, correspondiente a la presión: $\vec{f} = -p\,\hat{n}$, al igual que sucedía cuando el fluido (real o perfecto) se encontraba en reposo.

Se transforma la 1ª ecuación de balance mecánico (ecuación global) en una ecuación puntual. Para esto antes se deben escribir todos los miembros de dicha ecuación en forma de integrales de volumen en el mismo dominio D. El único que hay que transformar es el término de las presiones, el cual (utilizando el teorema de la divergencia de Gauss) se puede probar que se escribe como: $\int_{\partial D} -p\hat{n}\,dA = \int_D -\vec{\nabla}p\,dV$.

Por lo tanto, la 1ª ecuación de balance mecánico queda:

$$\int_D \rho.\vec{a}\,dV = \int_D \rho.\vec{g}\,dV + \int_D -\vec{\nabla}p\,dV \Rightarrow \int_D \left(\rho.\vec{a} - \rho.\vec{g} + \vec{\nabla}p\right)dV = 0$$

Como la última integral es igual a cero para cualquier volumen de control D, se deduce que el integrando debe ser también igual a cero. De aquí se obtiene lo que se llama la ecuación puntual de balance mecánico: $\rho.\vec{a} = \rho.\vec{g} - \vec{\nabla}p$.

Recordando el resultado al que se llegó al comienzo de éste capítulo: $\vec{a} = \dot{v}\,\hat{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}$, se puede sustituir en la ecuación anterior.

$$\rho.\left(\dot{v}\,\hat{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}\right) = \rho.\vec{g} - \vec{\nabla}p\,,$$

donde se puede aplicar el teorema de transporte al primer término del lado izquierdo:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\nabla}v \bullet \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\nabla}v \bullet v\,\hat{\tau} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(v^2/2\right) \bullet \hat{\tau}$$

Por otro lado, el término correspondiente a la fuerza de masa ($\rho.\vec{g}$), se puede escribir como el gradiente de una función: $\rho.\vec{g} = -\rho.g\,\hat{k} = -\vec{\nabla}(\rho.g.z)$. Donde z es la coordenada vertical y $\hat{k}$ es el versor que indica la dirección de z.

Juntando estos últimos resultados, la ecuación puntual de balance mecánico resulta:

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(v^2/2\right) \bullet \hat{\tau}\right]\hat{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n} = -\vec{\nabla}(g.z) - 1/\rho\,\vec{\nabla}p = -\vec{\nabla}\left(g.z + p/\rho\right)$$

A partir de esta última ecuación vectorial, se pueden obtener tres ecuaciones escalares, si se proyecta sobre las tres direcciones $\hat{\tau}$, $\hat{n}$ y $\hat{b}$.

$\hat{\tau}$) $\frac{\partial v}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(v^2/2\right)\bullet\hat{\tau}=-\vec{\nabla}\left(g.z+p/\rho\right)\bullet\hat{\tau}\Rightarrow 1/g\,\frac{\partial v}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)\bullet\hat{\tau}=0$

$\hat{n}$) $\frac{v^2}{R_c}=-\vec{\nabla}\left(g.z+p/\rho\right)\bullet\hat{n}\Rightarrow\frac{v^2}{g.R_c}=-\vec{\nabla}\left(z+p/\rho g\right)\bullet\hat{n}$

$\hat{b}$) $0=-\vec{\nabla}\left(g.z+p/\rho\right)\bullet\hat{b}$

Donde la última ecuación no agrega información ya que se había supuesto un movimiento plano.

De la ecuación del medio, se puede deducir un resultado importante. Si el fluido presenta un movimiento rectilineo, se tiene que R_c es infinito, por lo que: $-\vec{\nabla}\left(z+p/\rho g\right)\bullet\hat{n}=0$. Entonces, en un flujo rectilíneo, se tiene que en una dirección transversal al flujo, el término $z+p/\rho g=cte$.
Este término recibe el nombre de **cota piezométrica**, y este último resultado también se puede aplicar cuando el fluido se encuentra en reposo (v=0), en cuya ocasión se había llamado “ley hidrostática de presiones”.

Por último, integrando la primera ecuación (proyección según $\hat{\tau}$) en una línea de flujo entre dos puntos 1 y 2, se obtiene:

$$\int_1^2 1/g\,\frac{\partial v}{\partial t}\,ds+\int_1^2\vec{\nabla}\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)\bullet\hat{\tau}\,ds=0\,,$$

donde $\vec{\nabla}\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)\bullet\hat{\tau}=\frac{\partial\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)}{\partial s}$, por lo que la ecuación anterior queda:

$$\int_1^2 1/g\,\frac{\partial v}{\partial t}\,ds+\int_1^2\frac{\partial\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)}{\partial s}\,ds=0\Rightarrow\int_1^2 1/g\,\frac{\partial v}{\partial t}\,ds+\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)\Big|_1^2=0$$

Si se introduce la hipótesis (muchas veces válida) de que el movimiento del fluido es estacionario, el primer término se hace cero, y se tiene que:

$$\boxed{\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)_1=\left(v^2/2g+z+p/\rho g\right)_2}$$

La anterior se llama **<u>Ecuación de Bernoulli</u>**, y el término que está entre paréntesis recibe el nombre de **Carga Hidráulica** o **energía por unidad de peso**. Se puede ver claramente, que el término de la velocidad es la energía cinética por unidad de peso, y la cota piezométrica es una energía potencial por unidad de peso.

Si se incorpora la energía interna por unidad de peso (u/g), el calor intercambiado con el exterior por unidad de peso ($\dot{Q}/\dot{m}g$), y el trabajo intercambiado con una máquina por unidad de peso (carga hidráulica intercambiada), la ecuación anterior se transforma en la **<u>Ecuación de Conservación de la Energía</u>**:

$$\boxed{\left(\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u}{g}\right)_1+H_M+\frac{\dot{Q}}{\dot{m}g}=\left(\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u}{g}\right)_2}$$

Como se verá más adelante, el calor intercambiado y la diferencia en energía interna se deben a la pérdida de carga por fricción, por lo que si el fluido es perfecto entonces $\frac{u_1}{g}-\frac{u_2}{g}+\frac{\dot{Q}}{\dot{m}g}=0$.
Y por supuesto, si no hay ninguna máquina que intercambie energía mecánica con el fluido (bomba/ventilador ó turbina), entonces $H_M = 0$. En estos casos la ec. de la energía coincide con la ecuación de Bernoulli.

La carga hidráulica se puede clasificar de la siguiente forma:

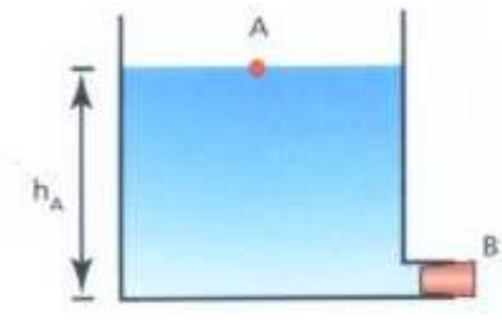
Carga dinámica: $H_{din}=\frac{v^2}{2g}$

Carga estática: $H_{est}=z+\frac{p}{\rho g}$

3.2.1. <u>Consideraciones sobre la ecuación de Bernoulli</u>

- Cuando todas las líneas de corriente se originan en un depósito, los puntos 1 y 2 para la aplicación de la ecuación, se pueden elegir de forma arbitraria, no necesariamente sobre la misma línea de flujo.
- En el flujo de un gas (como por ejemplo un sistema de ventilación) donde el cambio en la presión absoluta es una pequeña fracción de dicho valor, el gas se puede considerar incompresible.
- Para flujo en régimen no estacionario con condiciones gradualmente cambiantes, como en el vaciado de un depósito, se puede aplicar la ecuación sin error apreciable.
- Pueden obtenerse resultados teóricos aproximados, utilizando la ecuación de Bernoulli para fluidos reales (haciendo inicialmente caso omiso al efecto de corte viscoso). Para la solución correcta hay que tener en cuenta el efecto de la viscosidad.

3.3.1. <u>Ejemplo de aplicación</u>



Desagote cuasi-estacionario de un tanque por un orificio

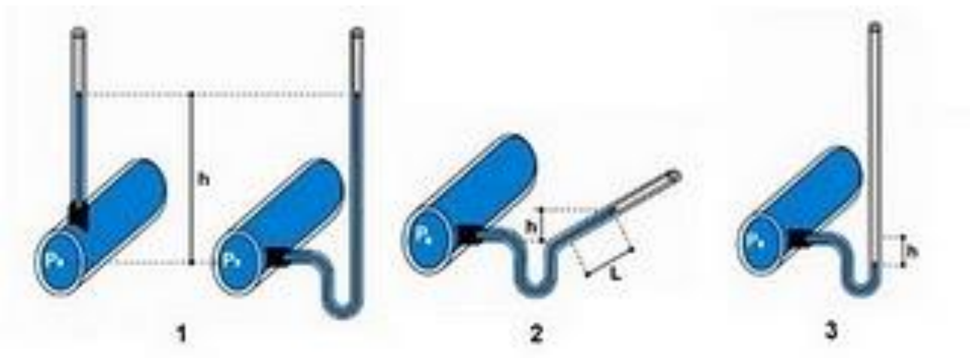
El tanque de la figura, cuando se quita el tapón del orificio de área A_o ubicado en la parte inferior del tanque, comienza a desagotar por el mismo. La superficie libre del tanque se puede considerar que varía muy lentamente, y el orificio está a una distancia h de la superficie libre. ¿Cuál será el caudal que desagota?

Se aplica la ec. de Bernoulli entre el punto A (situado en la superficie libre) y el punto B (situado en el chorro inmediatamente luego de salir a la atmósfera).
En el punto A se tiene que el fluido está en reposo (v=0) y la presión manométrica es cero, además de tener una cota z_A = h.
En el punto B el fluido tiene una velocidad v_B a hallar, la presión manométrica es cero, y la cota es z_B = 0.
La ec. de Bernoulli resulta: $h = {v_B}^2 / 2g \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow Q = A_o . \sqrt{2gh}$
En la realidad, el área de salida del chorro (A_c) no es idéntica al área del orificio (A_o) sino que presenta una contracción. La relación entre las áreas se define como coeficiente de contracción $C = A_c / A_o$; y el caudal ahora resulta $Q = C.A_o.\sqrt{2gh}$.

3.3. <u>Mediciones en Flujos</u>

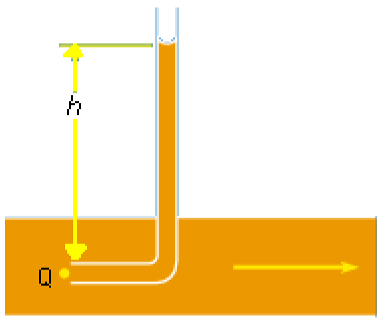
3.3.1. <u>Tubo piezómetro</u>

Se utiliza para medir la cota piezométrica en una sección de una tubería, y consiste en un tubo cuya toma presenta una sección paralela al flujo en la tubería. En la figura se observan distintos tipos de piezómetros, todos con una parte del tubo abierta a la atmósfera, donde la altura a la que asciende el líquido (h) es igual a la cota piezométrica (o carga estática) del fluido en la sección de medición (esto si el flujo en dicha sección es rectilíneo).

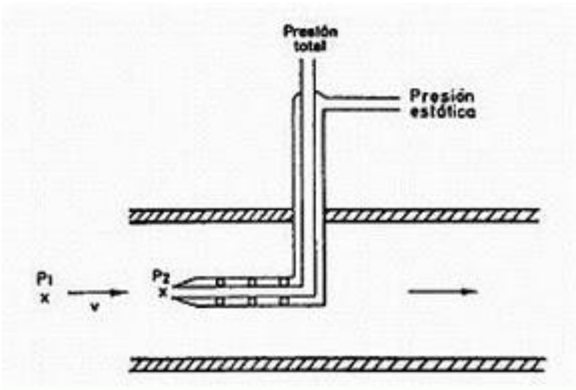


3.3.2. <u>Tubo de Impacto</u>

Se utiliza para medir la carga hidráulica en un punto de una tubería, y consiste en un tubo inserto en la tubería cuya toma presenta una sección perpendicular al flujo en la tubería. En el caso de la figura de abajo, en el que el tubo luego tiene una parte vertical abierta a la atmósfera, la carga hidráulica en el punto Q es igual a la altura a la que asciende el líquido por el tubo (h).



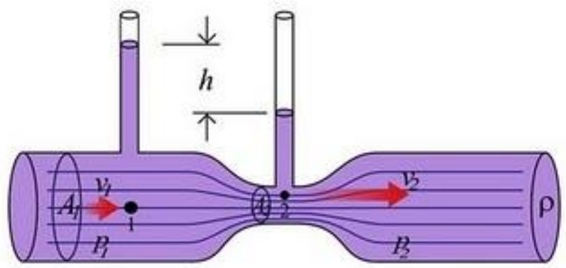
3.3.3. Tubo Pitot

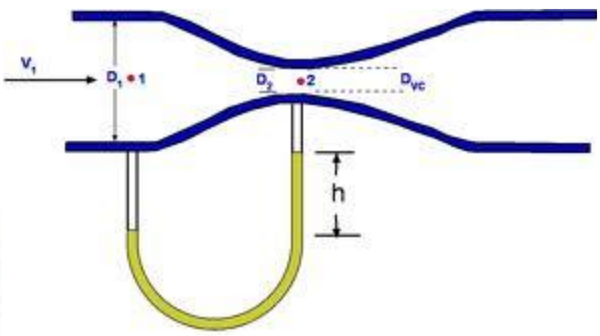


Se utiliza para saber el caudal que circula por una tubería o la velocidad en un punto de un fluido. Consiste esencialmente en dos tomas: una enfrentada al flujo (área perpendicular al flujo) que mide la carga total de una línea de flujo alineada con dicha toma (tubo de impacto), y otra formada por varios orificios laterales perpendiculares al flujo (área paralela al flujo) que miden la carga estática en la sección de medida (piezómetro). Mediante un manómetro diferencial, al cual se conectan ambas tomas, la indicación que se obtiene es la carga dinámica (diferencia entre carga total y carga estática) que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Por lo tanto, la velocidad en una línea de flujo alineada con la toma del Pitot, se calcula como $v(m/s) = \sqrt{2gH_{din}(m)}$

3.3.4. Tubo Venturi

Se utiliza para saber el caudal que circula por una tubería. Consiste en una contracción en la tubería, lo cual genera una diferencia de presión entre la sección no contraída (1) y la sección contraída (2). Mediante piezómetros ubicados en ambas secciones y aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto 1 y el punto 2, puede obtenerse el valor del caudal en función de la diferencia de niveles de líquido en las ramas abiertas o tubos en U (según corresponda).





A continuación se desarrollan los cálculos para el caso de los piezómetros de ramas abiertas:

Ec. de Bernoulli entre punto 1 y punto 2: $\dfrac{p_1}{\gamma} + z_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{p_2}{\gamma} + z_2 + \dfrac{v_2^2}{2g}$

Ec. de continuidad: $Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Juntando ambas ecuaciones y expresando las velocidades en función del caudal, queda:

$$\frac{Q^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

Como en las secciones (1) y (2) el flujo es rectilíneo, la altura a la que asciende el fluido en cada tubo piezométrico corresponde con la cota piezométrica de la sección correspondiente. Por lo tanto la diferencia de cotas piezométrica equivale a la diferencia de los niveles de las superficies libres en las ramas abiertas:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h$$

Con este resultado, el caudal se puede calcular como: $Q = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\dfrac{1}{A_2^2} - \dfrac{1}{A_1^2} \right)}}$

En el caso que la diferencia de piezométricas se mida con un tubo U con fluido manométrico, la ecuación para el caudal difiere de la hallada arriba.
Además, vale aclarar que este resultado es teórico y sólo puede utilizarse de forma aproximada en situaciones reales (con pérdida de carga). Para conocer el valor correcto de caudal utilizando un tubo Venturi, el mismo debe construirse de acuerdo a normas, como por ejemplo la norma ISO 5167 Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices – Part 1: Orifice plates, nozzles and Venturi tubes inserted in circular cross-section conduits running full. Si no cumple con lo especificado por la norma, el tubo Venturi debería ser calibrado.

3.3.5. <u>Placa Orificio</u>

Se utiliza para medir el caudal que circula por una tubería, y utiliza el mismo principio de funcionamiento que el tubo Venturi, generándose una diferencia de presión a partir de una contracción en el flujo.

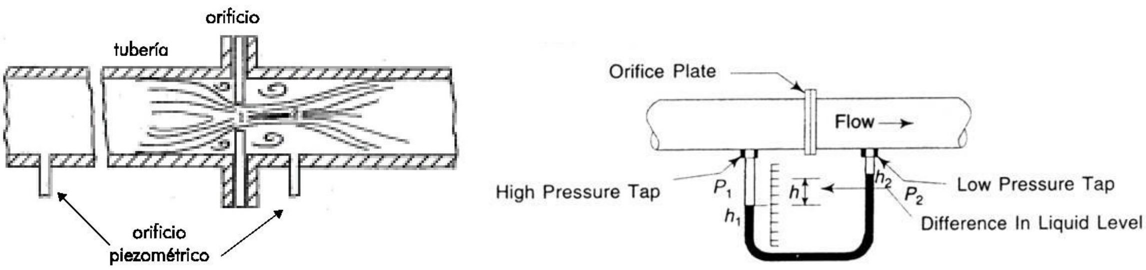


Fig. 1 Medidor de Orificio

Vale lo mismo que se mencionó anteriormente para tubos Venturi.

3.4. Esfuerzos dinámicos

Se refiere al análisis de las fuerzas que se generan en el seno de un fluido en movimiento y las fuerzas que ejerce un fluido en movimiento sobre una superficie sólida. Por ejemplo, se podría calcular la fuerza sobre un codo, una contracción, etc. en una tubería por la que circula un fluido; o la fuerza que ejerce un chorro sobre una placa.

Estas fuerzas, que son fuerzas de contacto, se podrían calcular directamente si conociéramos la distribución de presiones en la superficie analizada: $\vec{F} = \int_S p\hat{n}dA$. Generalmente la presión no varía en forma hidrostática en el seno de un fluido en movimiento, por lo que la resolución de la integral se ve comprometida por el hecho de no conocer la forma en la que varía la presión *p*.

En forma alternativa, se había mencionado antes (en hidrostática, para el cálculo de fuerzas sobre superficies curvas) que dichas fuerzas se pueden hallar indirectamente despejándolas de la primera ecuación de balance mecánico.

$$\int_D \rho.\vec{a}\, dV = \int_D \rho.\vec{g}\, dV + \int_{\partial D} \vec{f}\, dA$$

La elección del volumen de control, deberá cumplir el requisito de que la superficie sobre la cual interesa calcular la fuerza, pertenezca a la frontera de dicho volumen.

En el curso, nos reduciremos al cálculo de fuerzas en flujos estacionarios y asumiendo un fluido perfecto. Esto es, que las condiciones del flujo no varían localmente y que el fluido en estudio no tiene viscosidad (y por lo tanto no existen tensiones rasantes).

Recordando que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, se tiene que $\int_D \rho.\vec{a}\, dV = \int_D \rho.\, d\vec{v}/dt\, dV = \frac{d}{dt}\int_D \rho.\vec{v}\, dV$.

Ahora, aplicando el Teorema de Transporte a magnitudes globales, se puede escribir:

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho.\vec{v}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_D \rho.\vec{v}\, dV + \int_{\partial D} \rho.\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})dA$$

Y si el flujo es estacionario, el primer término del lado derecho se hace cero.

Por otro lado, si no existen tensiones rasantes se tiene que $\int_{\partial D} \vec{f}\, dA = \int_{\partial D} -p\,\hat{n}\, dA$.

Juntando estos resultados, se reescribe la ecuación de balance mecánico, resultando:

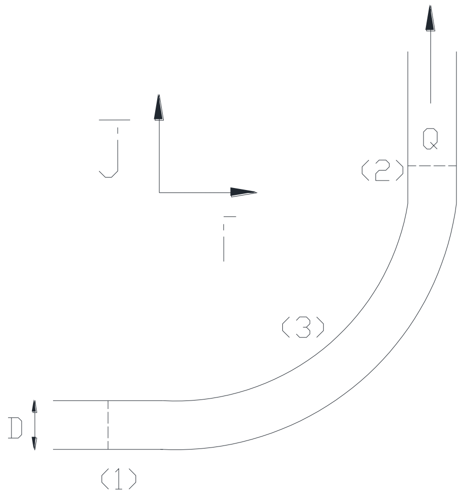
$$\int_{\partial D} \rho.\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})dA = \int_D \rho.\vec{g}\, dV + \int_{\partial D} -p\,\hat{n}\, dA$$

Recordando que el objetivo es hallar la fuerza de contacto ejercida entre el fluido en movimiento y una superficie sólida (que forma parte del segundo término del lado derecho), hay que tener en cuenta (a la hora de seleccionar el volumen de control) que se deben conocer los demás términos de la anterior ecuación. En particular, se deberán conocer las velocidades en todas las fronteras del volumen, y las fuerzas de contacto en el resto de las superficies que componen la frontera (con excepción de la propia superficie en estudio).

Observación: En la frontera de un fluido con otro fluido distinto o con una superficie sólida, el vector velocidad en cada punto es perpendicular a dicha frontera, por lo que en estos casos el producto escalar de $\vec{v}$ y $\hat{n}$ resulta cero.

Dependiendo de las dimensiones del volumen de control y de la densidad del fluido en consideración, se podrán o no, despreciar las fuerzas de masa (peso del volumen de control).

Ejemplo: Fuerza ejercida sobre un codo horizontal de 90º y diámetro D, por un caudal de agua Q que circula por la instalación.



El volumen de control es la porción de agua dentro del codo delimitada por las superficies 1 (tapa de entrada de flujo), 2 (tapa de salida del flujo) y 3 (superficie del codo).

La ecuación de balance mecánico resulta:

$$\int_1 \rho.\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})dA + \int_2 \rho.\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})dA + \int_3 \rho.\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})dA = \int_D \rho.\vec{g}\,dV + \int_1 -p\,\hat{n}\,dA + \int_2 -p\,\hat{n}\,dA + \int_3 -p\,\hat{n}\,dA$$

Donde la velocidad en la superficie 3 (interfaz codo-agua) y el versor normal a la superficie son perpendiculares en todos los puntos ($\vec{v}\cdot\hat{n}=0$) y la resultante de presiones en la superficie 3 es el vector opuesto al que se está buscando, es decir, es la fuerza que ejerce el codo sobre el agua. Utilizando el teorema del valor medio, la ecuación resulta:

$$-\rho.v_1^2.A_1\,\hat{\imath} + \rho.v_2^2.A_2\,\hat{\jmath} = \rho.\vec{g}.V\,\hat{k} + p_1.A_1\,\hat{\imath} - p_2.A_2\,\hat{\jmath} + \vec{F}_{codo\rightarrow agua}$$

Y como sólo interesa la componente horizontal de la fuerza se descarta el término del peso (que es en la dirección vertical). Además se expresan los términos de velocidad media en función del caudal y el área de las tapas de entrada y salida ($A = \pi D^2/4$).

$$\vec{F}_{agua\rightarrow codo} = \left(\rho.\frac{Q^2}{A^2} + p_1\right).A\ \hat{\imath} - \left(\rho.\frac{Q^2}{A^2} + p_2\right).A\ \hat{\jmath}$$

BIBLIOGRAFÍA

Robert L. Mott, 1996. MECANICA DE FLUIDOS APLICADA, 4ª ED. Prentice Hall.

Joseph B. Franzini y E. John Finnemore, 1999. MECANICA DE FLUIDOS con aplicaciones en ingeniería, 9ª ED. Mc Graw Hill.

Bruce Munson, Donald Young y Theodore Okiishi, 1999. FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS. Limusa-Wiley.