Ejercicio 1)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;/\; f(x)=\begin{cases} e^{x-1}(x^2+2x) & \text{si } x<1 \\ 3-\ln(\alpha x^2-1) & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a) · f continua $\forall x<1$ por tratarse de producto de funciones continuas $\forall x<1$

· f cont $\forall x>1$, suma de funciones continuas $\forall x>1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \underline{e^{x-1}}(x^2+2x) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3-\ln(\alpha x^2-1) = 3\ln(\alpha-1)$$

f cont en $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$3\cdot\ln(\alpha-1)=3 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$$

b) Si $x<1$ f es derivable por producto de funciones derivables $\forall x<1$

Si $x>1$ f es derivable por suma de funciones derivables $\forall x>1$

Si $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}(x^2+2x)-3}{x-1} =$$

$$= \lim \frac{(e^{x-1}-1)(x^2+2x)+x^2+2x-3}{} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+2x)+x^2+2x-3}{\cancel{x-1}} =$$

Otra forma de calcular el límite anterior és usando L'Hopital.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3-\ln(2x^2-1)-3}{x-1} =$$

$$\ln(2x^2-1) \underset{x\to 1}{\sim} 2x^2-2$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-2(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} -2\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = -4.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow f \text{ no és derivable en } x=1.$$

$$f' : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(x^2+4x+2) & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-4x}{2x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$e^{x-1}(x^2+4x+2) = 0 \underset{x<1}{\Longleftrightarrow} x^2+4x+2 = 0 \underset{x<1}{\Longleftrightarrow} x = -2\pm\sqrt{2}$$

$$\frac{-4x}{2x^2-1} < 0 \quad \forall x>1$$

$sg(f'(x))$: $+$ 0 $-$ 0 $+$ $\nexists$ $-$

$-2-\sqrt{2}$ $-2+\sqrt{2}$ 1

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$

punts crítics $\{-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2},\ 1\}$

En $x = -2-\sqrt{2}$ presenta máx. rel.

$x = -2+\sqrt{2}$ presenta mín. rel.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x-1}(x^2+2x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x}{e^{-x+1}} \underset{\text{L'Hopital}}{=}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{2x+2}{e^{-x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{e^{-x+1}} - \underbrace{\frac{2}{e^{-x+1}}}_{\to 0} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{e^{-x+1}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim \frac{-2}{-e^{-x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3 - \ln(2x^2-1) = -\infty \quad (2)$$

~~presenta un (-2+√2)~~

Del estudio crecimiento de f, (1) y (2) $\Rightarrow f$ presenta un máx. absoluto en $x=1$.

$f(1) = 3$

$f(-2-\sqrt{2})$ máx rel.

$f(-2+\sqrt{2})$ mín rel.

$f(1) = 3$ máx rel. y absoluto.

$\text{Im}(f) = (-\infty, 3]$

Solución

Problema 2

(a) Primera integral

$$F(x) = \int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2} \quad dx \tag{4}$$

Hago partes tomando $f = ln(x)$, $f^{'} = \frac{1}{x}$,$g = \frac{1}{x^2}$ y $g^{'} = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{ln(x)}{x^2} \quad dx = ln(x).\frac{-1}{x} + \int \frac{1}{x^2} \quad dx \tag{5}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2} \quad dx = \lim_{b \to \infty} ln(b).\frac{-1}{b} - \frac{-1}{b} - F(1) \tag{6}$$

Aplicando L'Hopital sobre el limite

$$\lim_{b \to \infty} ln(b)\frac{-1}{b} \tag{7}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2} \quad dx = \lim_{b \to \infty} \frac{-1}{b} - \frac{-1}{b} - F(1) = -F(1) = 1 \quad (\textbf{convergente}) \tag{8}$$

(b) Derivada

$$g : g(x) = 2^{sen(\frac{cos(x)}{x})} \tag{9}$$

Usando la sugerencia $e^{f^{'}} = f^{'}.e^{f}.ln(e)$
Tenemos que:

$$g(x)^{'} = [sen(\frac{cos(x)}{x})]^{'}.2^{sen(\frac{cos(x)}{x})}.ln2 \tag{10}$$

Aplicando derivada de la función compuesta y partes

$$[sen(\frac{cos(x)}{x})]^{'} = cos(\frac{cos(x)}{x}).\frac{-sen(x)x - cos(x)}{x^2} \tag{11}$$

$$f(x)^{'} = cos(\frac{cos(x)}{x}).\frac{-sen(x)x - cos(x)}{x^2}.2^{sen(\frac{cos(x)}{x})}.ln2 \tag{12}$$

(ii) 2 primitivas diferentes de $g^{'}$

$$g_1 : g_1(x) = 2^{sen(\frac{cos(x)}{x})} + 1 \tag{13}$$

$$g : g(x) = 2^{sen(\frac{cos(x)}{x})} \tag{14}$$

Ejercicio 2

c) $f(x) = x^2 - 1$ función par.

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ función par.

~~Area rayada~~ $\quad gr(f) \cap g(h) = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

$x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\text{Área región} = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} |f(x) - h(x)|\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por simetría.}}}{=} 2\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} |f(x) - h(x)| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x - x^2 + 1 \, dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \simeq 3{,}02$$

Ejercicio 3 $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \Big/ \begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{3} \quad n \geq 2 \end{cases}$

a) i) Por inducción

Paso base $a_1 = 1/2 < 1$ ✓

Paso inductivo

HI) $a_n < 1$ $\quad$ TI) $a_{n+1} < 1$

Demostr.)

Por HI $a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < 1 \Rightarrow a_n^2 + 2 < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{a_n^2+2}{3}}_{=a_{n+1}} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < 1$ ✓

De donde $a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ii) $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_n^2+2}{3} - a_n \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_n^2+2-3a_n}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a_n^2+2-3a_n \geq 0$ ✓

Por i $a_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_n^2 + 2 - 3a_n = 0$

$a_n = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} a_n = 2 \\ a_n = 1 \end{cases}$

$\begin{array}{ccccc} + & | & - & | & + \\ & 1 & & 2 & \end{array}$

iii) Por i $a_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ acot. sup

Por ii $(a_n) \nearrow$

$\Rightarrow a_n$ converge $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2+2}{3} = \dfrac{l^2+2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{l^2+2}{3} = l \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 + 2 - 3l = 0 \Leftrightarrow$

Ejercicio 3

b) $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n}$.

$-1 \leq \sin^3(n+1) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2+\sin^3(n+1) \leq 3 \Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n} \leq \frac{3}{2^n+n} < \frac{3}{2^n} \Rightarrow$

$\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n} < \sum_{1}^{+\infty} 3/2^n = 3\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

$\displaystyle\sum_{1}^{+\infty}\left(1/2\right)^n$ geométrica de razón $1/2$ $\displaystyle\Rightarrow \sum_{1}^{+\infty}\left(1/2\right)^n$ C.

$\Downarrow$ Por linealidad

$3\sum (1/2)^n$ C.

$\Rightarrow$ Por comparación $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n}$ C.