Problema 1 [35 pts.]

Sea la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi x)}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ (\alpha+1)x - \beta & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ sen(\frac{\pi}{2}x) + x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) [10 pts.] Determine para que valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, g es continua. Fundamente detalladamente su resultado.

(b) [10 pts.] Estudie derivabilidad de g en $\mathbb{R}$.

(c) [15 pts.] Estudie acotación de g en $\mathbb{R}$ y halle, en caso de existencia, extremos absolutos.

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{1 - \overbrace{\cos(\pi x)}^{-1}}{\underbrace{x-1}_{-2}} = -1$

$\displaystyle\lim_{x \to -1^+} (\alpha+1)x - \beta = -\alpha - 1 - \beta$

$f(-1) = -\alpha - 1 - \beta$

$\Longleftrightarrow$ CNyS de cont. en un punto $\quad -\alpha - 1 - \beta = -1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \quad (*)$

$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} (\alpha+1)x - \beta = \alpha + 1 - \beta$

$\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \overbrace{sen(\pi/2\, x)}^{1} + x^2 = 2$

$f(1) = \alpha + 1 - \beta$

$\Longleftrightarrow$ C.NyS de cont. en un punto $\quad \alpha + 1 - \beta = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 \quad (**)$

g es cont. $\forall x < -1$ (suma y cociente (divisor $\neq 0$) de func. continuas)

g es cont $\forall x : -1 < x < 1$ (polinómica de 1er grado)

g es cont $\forall x > 1$ (suma de funciones continuas)

g es cont en $x = -1$ si $\alpha + \beta = 0$ (por lo hecho en *)

g es cont en $x = 1$ si $\alpha - \beta = 1$ (" " " **)

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ g es cont $\forall x \in \mathbb{R}$ si $\alpha = 1/2$ y $\beta = -1/2$

b) $\forall x \neq 1$ y $x \neq -1$ g es derivable por tratarse de (suma, cociente de funciones derivable.)

Veamos que pasa en $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\frac{1 - \cos(\pi x)}{x-1} + 1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-\cos \pi x + x}{(x+1)(x-1)} \underset{\text{L'Hopital}}{=}$$

$g(-1) = -1$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{\overbrace{\sin \pi x}^{\to 0} + 1}{2x} = -1/2$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{3/2\, x + 1/2 + 1}{x+1} \underset{\text{Factorizando}}{=} \lim_{x \to -1^+} \frac{3/2\,(x+1)}{x+1} = 3/2$$

$\Rightarrow$ g no es derivable en $x = -1$

Veamos en $x=1$ $\qquad g(1) = 2$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3}{2}(x-1)}{x-1} = \frac{3}{2} \\ &\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x^2}^{1\ \ 1} - 2}{x-1} = 2 \end{aligned}\right\}$$

g no es derivable en $x = -1$

Derivada: $g: \mathbb{R} - \{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + \cos(\pi x) + \pi \operatorname{sen}(\pi x)(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x < -1 \\[2ex] \dfrac{3}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) Para estudiar acotación

Observar:

- $g'(x) = \frac{3}{2} > 0 \quad \forall x \in (-1,1) \Rightarrow g$ creciente en $(-1,1)$
- $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x > 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow g$ creciente en $(1,+\infty)$
- $g(1) = 2$
- g es cont en $[-1, +\infty)$
- $g(-1) = -1$

$\Rightarrow$ Se deduce que $g(x) > -1 \quad \forall x \in (-1, +\infty)$ (A)

Veamos si $g(x)$ es menor que -1 si $x < -1$

$$\frac{1-\cos(\pi x)}{x-1} + 1 = \frac{x-\cos(\pi x)}{x-1} > 0 \Longrightarrow$$

Si $x < -1$ $\quad x - 1 < 0$

$x - \cos(\pi x) < 0$

Tener en cuenta que $-1 < \cos(\pi x) < 1$

$$\Longrightarrow g(x) > -1 \ \forall x < -1 \quad (B)$$

De (A) y (B) $g(x) \leq -1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow g$ acotada inferiormente

$\exists\, g(-1) = -1$ es mínimo absoluto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\tfrac{\pi}{2} x\right) + x^2 = +\infty \Rightarrow f \text{ não}$$

a colete sup.

Problema 2 [30 pts.]

(a) [20 pts.] Clasifique las siguientes integrales y, en caso de convergencia, calcule su valor.

$$\int_1^{\infty} x.e^{-x^2} \ dx \tag{1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5}.e^{x} \ dx \tag{2}$$

(b) [10 pts.] Halle todas las primitivas de

$$f : f(x) = cos(x)sen(x)^2 \tag{3}$$

(a)

Hallamos función integral $F(x) = \int_1^x t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} e^{-u} du =$

C.V.

$u = t^2$

$du = 2t\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right)\Big|_1^{x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-1}$

tomamos límite para $x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-x^2} = \frac{1}{2e}$, Concluimos que $\int_1^{+\infty} x e^{-x^2}$ converge y $\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} = \frac{1}{2e}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5} \cdot e^x \, dx$$

Observar que

- $\dfrac{x^2}{x^4+5} e^x > 0 \quad \forall x \geq 1$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4+5} e^x = +\infty \xRightarrow[\text{de convergencia.}]{C.N} \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5} e^x \, dx$ no C

  órdenes inf.

$\Longrightarrow$ No osalo $\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5} e^x \, dx$ D.

(b) [10 pts.] Halle todas las primitivas de

$$f : f(x) = cos(x)sen(x)^2 \qquad (3)$$

$$\int \cos(x)\, sen^2 x \, dx \quad = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} = \frac{sen^3(x)}{3}$$

C.V $\quad u = sen\, x$

$\quad du = \cos x \, dx$

(a) [10 pts.] Demuestre que es decreciente y acotada inferiormente la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{2^n}{3^n - 4} \qquad n \geq 2 \tag{4}$$

$(a_n)\downarrow \iff a_n \geq a_{n+1}$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2^n}{3^n - 4} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 4} = \frac{2^n(3^{n+1} - 4) - 2^{n+1}(3^n - 4)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} =$$

$$= \frac{2^n\left(3^{n+1} - 2\cdot 3^n + 4\right)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} = \frac{2^n\left(3^n(3-2) + 4\right)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} =$$

$$= \frac{\overbrace{2^n(3^n + 4)}^{>0}}{\underbrace{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)}_{>0}} > 0 \quad \forall\, n \geq 2 \Rightarrow a_n > a_{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a_n)\downarrow$

$a_n = \dfrac{2^n}{3^n - 4} > 0 \quad \forall n \geq 2 \implies (a_n)$ acotada inferiormente.

$\left.\begin{array}{l} (a_n) \downarrow \\ (a_n) \text{ acot. inferiormente} \end{array}\right\} \implies (a_n)$ Converge.

b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{3^n - 4} = 0$

(b) [5 pts.] ¿Es convergente? Fundamente su respuesta

(c) [20 pts.] Clasifique las siguientes series. Enuncie propiedades y criterios usados.

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{2+5^n}{2^n} \tag{5}$$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} \tag{6}$$

c) $\sum_{1}^{+\infty} \frac{2+5^n}{2^n} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{2}{2^n} + \frac{5^n}{2^n} = \sum_{1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^n$

observar: $2\left(\frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^n > \left(\frac{5}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 2$

$\sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ es geométrica de razón $\frac{5}{2} > 1 \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ D

$\xRightarrow[\text{(Minorante)}]{\text{comparación}} \sum_{1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n$ Diverge

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} = \frac{n+1}{2\cdot(2^2)^n} =$$

$$= \frac{n+1}{2\cdot 4^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2\cdot 4^n} = 0 < 1 \Longrightarrow \sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} \quad C$$

órdenes

D'Alembert con paso al límite

Ver propiedades y criterios en el teórico.