Resolución Examen 29/07/2020

1- Considera la función: $f: R \to R / f(x) = \begin{cases} x^2 e^x - 1, & x < 1 \\ \frac{\ln(x)}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

a) Determina existencia de extremos absolutos y relativos de f en R.

b) Estudia acotación de f en R y determina $Im(f)$.

a) Los extremos relativos de f, si existen, son puntos críticos (no todo punto crítico es extremo relativo).Entonces los candidatos a ser extremos relativos estarán en los puntos donde la función es derivable y la derivada en dicho punto es cero, o en los puntos donde la función no es derivable.

f es derivable en todo x<1, por tratarse de suma y producto de funciones derivables para todo x<1
f es derivable en todo x>1 por taratarse del cociente de funciones derivables para todo x>1
Veamos que pasa en x=1. Estudiamos la continuidad de f en x=1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 e^x - 1 = e - 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

f no es continua en x=1 $\rightarrow$ f no es dirivable en x=1 $\rightarrow$

$\rightarrow$ en $x=1$ se presenta un punto crítico

Hallamos la función derivada de f

$$f'(x) = \begin{cases} xe^x(x+2) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos las raíces de f'

$$xe^x(x+2) = 0 \underset{x<1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow$$ En $x=0$ y $x=-2$ se presentan puntos críticos.

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \underset{x>1}{\Longleftrightarrow} 1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e \Rightarrow$$ En $x=e$ se presenta un punto crítico

Resumen: puntos críticos en: $x=-2$, $x=0$, $x=1$ y $x=e$

Para clasificar los puntos crítico donde la función es derivable estudiamos el signo de la derivada

		-2		0		1		e	
$sg[f'(x)]$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\nexists$	$+$	$\circ$	$-$
	↗		↘		↗		↗		↘

$$x > e \Rightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow 1-\ln(x) < 0 \Rightarrow \frac{1-\ln(x)}{x} < 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} xe^x > 0 \\ x+2 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow xe^x(x+2) > 0$$

Por lo tanto $f(-2)$ y $f(e)$ máximos relativos

$f(0)$ mínimo relativo.

Veamos qué pasa en $x=1$

$f(1)=0$ $\longrightarrow$ $f(1)$ mínimo relativo

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e-1 > 0 \Rightarrow \exists E^-(1,\delta) \,/\, \forall x \in E^-(1,\delta)\ f(x) > 0 \\ \forall x > 1 \ \ \dfrac{\ln(x)}{x} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists E^*(1,\delta) \,/\, \forall x \in E^*(1,\delta)\ f(x) > 0$$

Para estudiar existencia de extremos absolutos tenemos que tener en cuenta que el $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{x} - 1 = \lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot e^{-t} - 1 = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} - 1 = -1$$

$\frac{t^2}{e^t} \to 0$ (órdenes de infinitos)

c.v. $t = -x \rightarrow x^2 = (-t)^2 = t^2$

$x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

(órdenes de infinitos)

$f(-2) = 4e^{-2} - 1$ máximo relativo

$f(0) = -1$ mínimo relativo

$f(1) = 0$ mínimo relativo

$f(e) = 1/e$ máximo relativo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e - 1$$

Mínimo absoluto $f(0) = -1$

No hay máximo absoluto

b) <u>Acotación</u>

Por parte a) $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f acotada inferiormente

Por parte a) $f(x) < e-1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f acotada superiormente

$$Im(f) = [-1, e-1)$$

2- a) Dada la función $h: h(x) = x\,L(1+x^2)$, halla la primitiva de h cuyo gráfico pasa por el origen de coordenadas.

b) Clasifica las siguientes integrales impropias y halla la suma en caso de convergencia;

$$i)\ \int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}dt \qquad ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}dt$$

$$a)\ H(x) = \int x\,L(1+x^2)\,dx = \int \frac{L(t)}{2}\,dt \underset{\text{Linealidad}}{=} \frac{1}{2}\int L(t)\,dt \underset{\text{Partes}}{=} t\,L(t) - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

C.V. $t = 1+x^2$
$dt = 2x\,dx$

$f(t) = L(t) \to f'(t) = \frac{1}{t}$
$g'(t) = 1 \to g(t) = t$

$$= t\,L(t) - t + k = (1+x^2)\left[L(1+x^2) - 1\right] + k$$

Como el punto $(0;0)$ pertenece al gráfico de la primitiva $\Rightarrow H(0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+0)\left[L(1+0) - 1\right] + k = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

$$H(x) = (1+x^2)\left[L(1+x^2) - 1\right] + 1$$

b) i $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt$

$f(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2(t^2+4)} > 0 \quad \forall t \in [1,+\infty)$

Impropia de 1ra especie.

f continua en $[1,+\infty)$

Fracciones simples

$$\frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{Mt+N}{t^2+4}$$

Obtenemos $A = \frac{1}{4}$ $N = 3/4$

$B = M = 0$

$$\int \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt = \int\left(\frac{1}{4t^2} + \frac{3}{4(t^2+4)}\right)dt = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+4} = \frac{-1}{4t} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(t/2) + K \quad (K_1+K_2=K)$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2}\,dt = \boxed{\frac{-1}{4t} + K_1}$$

$$\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{4}\int\frac{dt}{4\left((t/2)^2+1\right)} = \frac{3}{4}\int\frac{2\,du}{4(u^2+1)} = \frac{3}{8}\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(u) + K_2 = \boxed{\frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(t/2) + K_2}$$

c.v. $u = t/2$

$du = \dfrac{dt}{2}$

$$\int_1^x \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt = -\frac{1}{4t} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(t/2) + k \Big]_1^x =$$

$$= -\frac{1}{4x} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(x/2) + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-\frac{1}{4x}}_{\to 0} + \frac{3}{8}\underbrace{\operatorname{Arctg}(x/2)}_{\to \pi/2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)$$

Portanto $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt$ C y $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt = \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2(t^2+4)}\,dt.$

$f(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2(t^2+4)} > 0 \quad \forall x \neq 0$

f no está definida en 0

Hay que estudiar

$\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt \quad \int_{-1}^{0} f(t)dt \quad \int_{0}^{1} f(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ sería convergente si los cuatro integrales convergen.

Estudiemos $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

$$\int_x^1 f(t)\,dt = -\frac{1}{4t}+\frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(t/2)+k\Big]_x^1 = -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)+\frac{1}{4x}-\frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(x/2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(1/2)+\underbrace{\frac{1}{4x}}_{\to+\infty}-\frac{3}{8}\underbrace{\operatorname{Arctg}(x/2)}_{0} = +\infty \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ D $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ D

3- a) Clasifica y en caso de ser posible calcula/acota su suma:

$$i) \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-n} + 10n^2}{n^2 5^{n+1}} \qquad ii) \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

b) Enuncia propiedades y criterios usados para resolver (a).

a) i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1/5)^{-n} + 10n^2}{n^2 5^{n+1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{n^2 5^{n+1}} + \frac{10n^2}{n^2 5^{n+1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{5n^2} + \frac{2}{5^n}$

Estudiamos las series $\sum 1/5n^2$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 2/5^n$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{5n^2} = \frac{1}{5} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} 1/n^2 \ C \quad \left(\sum 1/n^2 \text{ armónica } p>1\right) \\ 1 \leq \sum 1/n^2 \leq 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle\sum \frac{1}{5n^2} \ C \ \text{ y } \\ \displaystyle\frac{1}{5} \leq \sum \frac{1}{5n^2} \leq \frac{2}{5} \end{array} \quad (1)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2}{5^n} = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{5^n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{5^n} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$ serie geométrica de razon $\frac{1}{5} < 1$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{5}\right)$ C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{2}{5^n} \ \text{C} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{2}{5^n} = 2\cdot\frac{1/5}{1-1/5} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

De 1 y 2 por linealidad $\sum \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-n} + 10n^2}{n^2 5^{n+1}}$ C y

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \leq \sum \frac{(1/5)^{-n} + 10n^2}{n^2 5^{n+1}} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Vamos a aplicar el criterio de D'Alembert con paso al límite

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!\;n!} =$$

$$= \frac{\cancel{(n!)}(n+1)\,\cancel{(n!)}(n+1)}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2n!}}{\cancel{n!}\;\cancel{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{(n+1)^2}^{\sim n^2}}{\underbrace{(2n+1)}_{\sim 2n}\underbrace{(2n+2)}_{\sim 2n}} = \frac{1}{4} < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \;\; C$$

3. b) Ver teórico:

Convergencia serie geométrica
Convergencia serie armónica
Criterio de D'Alembert.
Linealidad.

Es lo que usamos en esta resolución.