Álgebra de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición de matriz

Los arreglos rectangulares de números como el siguiente reciben el nombre de matrices.

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición de matriz (II)

Más formalmente, dado un conjunto X, se denomina matriz de n filas y m columnas a un conjunto de n×m elementos de X, dispuestos en un arreglo rectangular de n filas y m columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición de matriz (III)

- X puede ser un conjunto de funciones, de palabras de un alfabeto, de números, etc.
- De aquí en adelante, salvo que se especifique lo contrario, los elementos del conjunto X serán números reales y denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ (n filas y m columnas) por M_{nxm}

Definición de matriz (IV)

- También se escribe A=(a_{ij}) (i = 1,…, n y j = 1,..., m) para indicar que A es la matriz de orden n×m que tiene elementos a_{ij}
- Dos matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}), de orden n×m, son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i = 1,..., n y j = 1,..., m.
- Es decir, dos matrices son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

Como la expresamos matrices en Octave

A=[1 4 -3; 2 1 5; -2 5 3]

>>>A =

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{matrix}$$

Matriz Cuadrada

Tiene igual número n de filas que de columnas (n=m). En ese caso se dice que la matriz es de orden n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

Todos los elementos son ceros

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

La función **zeros** con un solo argumento escalar de entrada, se genera una matriz cuadrada

```
A = zeros(3)
A =
        0     0     0
        0     0     0
        0     0     0
```

Matriz de unos

La función **ones** es similar a la función zeros, pero crea una matriz de unos

```
A = ones(3)
A =
        1     1     1
        1     1     1
        1     1     1
```

```
B = ones(3,2)
B =
        1     1
        1     1
        1     1
```

Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada, $A=(\ a_{ij}\ )$, es diagonal si $a_{ij}=0$, para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

La función **diag** para extraer la diagonal de una matriz.

```
A=[1 2 3; 3 4 5; 1 2 3];

diag(A)
```

```
ans =
      1.00
      4.00
      3.00
```

Matriz Diagonal

Se pueden extraer otras diagonales al definir una segunda entrada, k, a diag.

$\mathbf{k} = 1$

$$\mathbf{k} = -1 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
diag(A,1)

 ans =
       2
       5
```

Matriz Unidad

Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular

Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adición de matrices

Sean A, B $\in M_{n\times m}$. La matriz $C = (c_{ij}) \in M_{n\times m}$ es la suma de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, y se denota $C = A + B$, si sus elementos cumplen:

$$\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}\ (i = 1, 2,..., n, j = 1, 2,..., m)$$

Adición de matrices (II)

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4 & 4+4\\ (-1)+2 & 3+4\\ 0+(-1) & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 1 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Suma de matrices (Octave)

A=[1 4 -3; 2 1 5; -2 5 3]

B = [1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]

C= A + B

```
>>>A =
  1   4  -3
  2   1   5
 -2   5   3
B =
  1   1   1
  1   1   1
  1   1   1
C =
  2   5  -2
  3   2   6
 -1   6   4
```

Multiplicación de una matriz por un número

Se denomina producto de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$ por un número λ a una matriz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}$ cuyos elementos son de la forma

$$\mathbf{b_{ij} = \lambda a_{ij}}\ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

Multiplicación de una matriz por un número(II)

$$\lambda \cdot A = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & -20 \\ -25 & -35 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices por un número (Octave)

A=[1 4 -3; 2 1 5; -2 5 3]

B = A * 2

```
>>>A =

   1   4  -3
   2   1   5
  -2   5   3

B =

    2    8   -6
    4    2   10
   -4   10
6
```

Multiplicación de matrices

Se denomina matriz producto de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$ por la matriz $B = (b_{jk}) \in M_{m\times p}$ una matriz $C = (c_{ik}) \in M_{n\times p}$ cuyos elementos son de la forma

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

Multiplicación de matrices(II)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 14\\ 0 & 4 & \boxed{7}\\ -8 & 0 & 12\end{pmatrix}=C$$

fila 2 por **columna 3** = elemento que ocupa la **posición 23**

$$c_{23}=\sum_{j=1}^{2}a_{2j}b_{j3}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}=2\cdot 5+(-1)\cdot 3=10-3=7$$

Multiplicación de matrices(Octave)

A=[1 4 -3; 2 1 5; -2 5 3]

B = [1 1 0; 1 0 1; 0 1 1]

C= A * B

```
>>>A =
   1   4  -3
   2   1   5
  -2   5   3
B =
   1   1   0
   1   0   1
   0   1   1
C =
   5  -2   1
   3   7   6
   3   1   8
```

Orden de la matriz producto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 7 & 10 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4=4

No podemos multiplicar B * A

$$\cancel{B \cdot A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

A * B no siempre es B * A

Consideremos las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces, por un lado,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 17\\ 11 & 8\end{pmatrix}$$

y por otro lado,

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 7 & 9 & 11\\ 12 & 9 & 6\end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta

La traspuesta de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$, es la matriz $A^T = (a_{ji}) \in M_{m\times n}$, que se obtiene a partir de la matriz A al intercambiar las filas por las columnas (o viceversa).

La traspuesta de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta (Octave)

A = [1 2 3; 4 5 6]

transpose(A)

```
>>>A =

   1   2   3
   4   5   6

ans =

   1   4
   2   5
   3   6
```

Matriz invertible

- Una matriz cuadrada A es invertible si existe una matriz, que denotaremos por A^{-1}:
- que cumple $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$, donde I es la matriz unidad.
- En ese caso se dice que A^{-1} es la inversa de A .

Matriz invertible(II)

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}$$

Matriz invertible(III)

ya que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Matriz invertible(Octave)

A = [2 -1 1; 1 1 0; 0 1 -3]

```
>> inverse(A)
ans =

   0.37500   0.25000   0.12500
  -0.37500   0.75000  -0.12500
  -0.12500   0.25000  -0.37500
```

```
>> inv(A)
ans =

   0.37500   0.25000   0.12500
  -0.37500   0.75000  -0.12500
  -0.12500   0.25000  -0.37500
```

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con m ecuaciones y n incógnitas se puede escribir en forma matricial, Ax = b

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y \qquad\quad = 3 \\ \qquad y - 3z = -7 \end{cases}$$

Entonces, siguiendo la notación anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave

Una forma de resolver el sistema es escribir la matriz ampliada:

A = [2 -1 1; 1 1 0; 0 1 -3]

b=[3; 3; -7]

Ab = [A b]

```
>>>A =
   2  -1   1
   1   1   0
   0   1  -3
b =
   3
   3
  -7
Ab =
   2  -1   1   3
   1   1   0   3
   0   1  -3  -7
```

Resolviendo en Octave(rref)

Y usar la función ***rref***, que calcula la forma reducida por filas de la matriz A:

rref (Ab)

\>>>ans =

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

es decir, la solución es

$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Otra opción (uso función inv)

Otra forma de resolver el sistema consiste en despejar x,

$x = A^{-1} * b$, en Octave:

x=inv(A)*b

```
>>>A =
   2  -1   1
   1   1   0
   0   1  -3
b =
   3
   3
  -7
x =
   1
   2
   3
```

Otra opción(uso de \)

División matricial por la izquierda

x=A\b

```
>>>A =
   2  -1   1
   1   1   0
   0   1  -3

b =
   3
   3
  -7

x =
   1
   2
   3
```

Otra opción (uso de la función linsolve)

```
A = [2 -1 1; 1 1 0; 0 1 -3]
b = [3; 3; -7]

x = linsolve(A, b)
```

```
>>>A =
   2  -1   1
   1   1   0
   0   1  -3

b =
   3
   3
  -7

x =
   1
   2
   3
```