

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/321757716>

# MODELO PRESA-PREDADOR EN EL MARCO ECOLÓGICO

Conference Paper · December 2017

---

CITATIONS  
0

READS  
282

1 author:



[Sandy Sánchez Domínguez](#)  
University of Oriente (Cuba)

31 PUBLICATIONS 24 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



ordinary differential equation and mathematical modeling [View project](#)

# MODELO PRESA-PREDADOR EN EL MARCO ECOLÓGICO

S. Sánchez<sup>1</sup>, A. I. Ruiz<sup>2</sup>, L. M. Lacort<sup>3</sup>, R. Ferreira<sup>4</sup>, Z. Ribeiro<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Delegación Santiago, Universidad de Oriente,

<sup>2</sup>Delegación Santiago, Universidade do Estado do Amazonas,

<sup>3,4,5</sup>Universidade Federal da Amazonas

[1jdmatematica.cne@uo.edu.cu](mailto:1jdmatematica.cne@uo.edu.cu), [2iruiz2005@yahoo.es](mailto:2iruiz2005@yahoo.es), [3lacort@upf.br](mailto:3lacort@upf.br), [4raineynascimento@hotmail.com](mailto:4raineynascimento@hotmail.com)

## RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio del modelo presa-depredador como una forma de convivencia de diferentes especies de animales en la naturaleza abierta, indicando los momentos de crecimiento y decrecimientos, lo que lleva a un comportamiento cíclico en su desarrollo; se presentan modelos para dos y tres especies, dando conclusiones de las tendencias futuras. Aquí se demuestra la existencia de la forma normal, lo que facilita dar conclusiones del desarrollo futuro con relación a la convivencia.

**PALABRAS CLAVES:** Ecología, Presa, depredador, Estabilidad.

## PRE-PREDATOR MODEL IN THE ECOLOGICAL FRAMEWORK

### ABSTRACT

In this study the Prey-Predator model is studied as a form of coexistence of different species of animals in the open nature, indicating moments of growth and decay, which leads to a cyclical behavior in their development; Models for two and three species are presented, giving conclusions of the future trends. Here the existence of the normal form is demonstrated, which facilitates conclusions about future development in relation to coexistence.

**Key words:** Ecology, Prey, Predator, Stability.

### 1 INTRODUCCION

La ecología es una ciencia que estudia los seres vivos y sus interacciones con el medio ambiente donde viven. Esta ciencia es de extrema importancia, pues los resultados de sus estudios proporcionan datos que revelan si los animales y los ecosistemas están en perfecta armonía. En una época en que la deforestación y la extinción de varias especies están en marcha, el trabajo de los ecologistas es de extrema importancia.

Muchos tipos de sistemas biológicos han sido modelados matemáticamente con el objetivo de realizar un mejor estudio de la interacción natural que existe entre diferentes especies; En especial el modelo presa-DEpredador tiene una posición relevante por la aplicabilidad no sólo a la Biología donde prácticamente rige la convivencia de diferentes especies en espacio abierto, sino además porque puede ser aplicado en otras áreas incluyendo la Economía. Aquí además de los modelos de Lotka-Volterra altamente divulgados analizaremos otros menos conocidos, además de su estudio cualitativo.

El modelo fue descubierto de forma Independiente por *Lotka* y por *Volterra*, y por este motivo se le conoce como modelo *Lotka-Volterra* o bien modelo presa-depredador y describe bastante bien la evolución de presas y depredadores cuando se centra en un ecosistema aislado. No obstante, hay que aclarar que dos poblaciones distintas en un mismo medio ambiente tienen varias maneras de sobrevivir, por ejemplo:

-La competencia mutua, es decir competir por la misma fuente alimentaria, tienden a provocar la extinción de una población de ellos, y la otra tiende a aprovechar la máxima capacidad de los recursos ambientales.

-La interdependencia, es decir, las dos poblaciones proporcionan algunos recursos alimenticios, viven pacíficamente entre ellos, y tienden a un estado de equilibrio.

- La ley de la selva, es decir una población sobrevive dependiendo de la abundancia de recursos naturales, llamada la presa; Sin embargo la otra población vive dependiendo de las poblaciones de presas, llamada el predador. Los dos elementos están compuestos por el modelo presa-depredador. Por ejemplo, los peces comestibles y los peces selvaquios, los conejos y los linces, las cochinillas de los pulgones, son típicos ejemplos de esta forma de convivencia.

En [1] Bessanezi se refiere al modelado matemático de diversos procesos entre ellos trata el modelo Presa-Predador, donde incluye la posibilidad de integración de sistema que simula esa interacción entre dos especies.

En [2] Runjie trata la interacción de especies diferentes en un medio abierto, indicando en especial un modelo para la convivencia entre una presa y un predador. Además, hace un paralelo en la economía llegando a algunas conclusiones del proceso. El modelo presa-depredador ha sido muy tratado usando diferentes técnicas, aquí se puede incluir, en [3] Rodríguez, Diomar y Andrade (2010).

Otro enfoque sobre el modelo Lotka-Volterra es presentado en [4] por los autores Altair Santos de Oliveira Sobrinho, Camila Fogaça de Oliveira, Carolina Massae Kita, Érica Regina Takano Natti, Paulo Laerte Natti (2016). En la disertación de maestría [5] Oliveira, C.F. (2011) se hace un estudio bastante exhaustivo del modelo presa-predador.

El tratamiento que haremos en ese caso se corresponda con otros modelos presentados en las investigaciones de otras enfermedades, en especial el caso de la sicklemis, bastante tratado y con gran cantidad de modelos ya desarrollados, sólo citará algunos de esos trabajos. En [6] Sánchez, S., Fernández, G. A. A., Ruiz. A. I. (2012) y [7] Sánchez, S., Fernández, G. A. A., Ruiz. A. I., y Carvalho, E. F (2016) se trata el estudio cualitativo de diferentes modelos en forma autónoma y no autónoma de la formación de polímeros.

Siguiendo esas ideas de esos trabajos precedentes aquí se simula la interacción entre dos y tres especies siendo simplificados los sistemas referidos para llegar a conclusiones de ese proceso de convivencia en la naturaleza abierta.

## **2 MODELO LOTKA-VOLTERRA**

Al principio vimos los modelos de crecimiento exponencial libre y con restricciones, pero en la naturaleza lo más frecuente es competencia entre especies diferentes en la lucha por la supervivencia, apareciendo aquí los modelos presa-predador.

Balsándose en los trabajos de Lotka, se desarrollaron los modelos que consideran a la población clasificada por grupos de edad, para así resolver las limitaciones de los modelos que tratan a todos los individuos de la población en forma idéntica.

Uno de los modelos matemáticos clásico, más utilizado, es el sistema dinámico constituido por dos elementos (en general dos especies de animales) que interactúan de tal manera que una de las especies (predadora) se alimenta de la otra (presa). Un ejemplo típico es el sistema formado por zorros y conejos, pero que puede ser trasladado, sin pérdida de generalidad, a cualquier otro contexto, como por ejemplo, el formado por vendedores y compradores.

Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de pasto que supondremos que nunca se agota. Cuando hay muchos conejos, la población de zorros aumentará puesto que el alimento es abundante, pero llegará un momento en el cual la población de conejos disminuirá al ser los zorros demasiados. Al no tener, los zorros, comida suficiente su población disminuirá, lo que favorecerá de nuevo a la población de conejos. Es decir, se producen ciclos de crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones. ¿Hay algún modelo matemático que explique este comportamiento periódico?

Por otro lado, en la segunda década del siglo XX el biólogo italiano Umberto D'Ancona estudió y recopiló datos de capturas de los tipos de peces en algunos puertos del Mediterráneo, por un lado sellos (tiburones, pez raja, etc.), y por Otros peces que eran comidos por los anteriores (sardinias, boquerones, etc.). Es decir, unas presas (los peces comestibles) y por el otro predador.

Una de las primeras razones en las que pensó estaba relacionada con la Primera Guerra Mundial. En efecto, en estas fechas se desarrolló la primera gran guerra y esto obligaba a que menos barcos salieron a pescar, y por lo tanto, al disminuir la intensidad de la pesca, esto provocaba el aumento en el número de peces depredadores (sándwiches). Sin embargo, este argumento tenía un problema y era que también habían aumentado el número de peces comestibles. De hecho, si la intensidad de pesca es pequeña, entonces ese hecho beneficia más a los depredadores que las presas. La pregunta pertinente era ¿por qué?

De manera resumida, se planteaban dos cuestiones:

- ¿Cómo explicar el comportamiento cíclico de la evolución de dos poblaciones, de dónde una especie se alimenta de la otra?
- ¿Por qué una intensidad baja de captura favorece más a los depredadores que a las presas?

Un estudio minucioso de estos tipos de sistemas se analiza en [8], trabajo de los autores López y Blé, donde se caracteriza el comportamiento de los sistemas Lotka-Volterra bajo la hipótesis de que la presa crece exponencialmente en ausencia de depredadores y el depredador desaparece en ausencia de presas, estudiando el comportamiento de las trayectorias en un entorno de las posiciones de equilibrio, se puede percibir la existencia de orbitas cerradas debido a la periodicidad de las soluciones.

La depredación es un tipo de interacción muy fundamental en la naturaleza, donde los depredadores capturan presas para su alimentación. Podemos imaginar que esa relación es beneficiosa sólo para el depredador, pero desde el punto de vista ecológico esto es importante para regular la densidad poblacional tanto de presas como de depredadores.

Los depredadores eliminan a los individuos de la población, consumiéndolos. La facilidad de captura de la presa depende mucho de la relación de tamaño entre la presa y el depredador. Cuanto mayor sea la presa, mayor será la dificultad de su captura. Algunas especies de animales cazan en manadas.

### 3 FORMULACIÓN DEL MODELO

El modelo Presa-Depredador simula la interacción entre dos especies donde una de ellas (presa) dispone de alimento en abundancia y la segunda (depredador) tiene como suministro alimentario exclusivamente a la población de presa. Vamos a admitir que durante el proceso, el medio no debe cambiar.

Sean:

-  $x = x(t)$  densidad de la población de presas en el instante  $t$ .

-  $y = y(t)$  densidad de la población de los depredadores en el instante  $t$ .

En este modelo se supone que las presas crecen exponencialmente en la ausencia de depredadores y que la tasa de mortalidad de los depredadores, en ausencia de presas es proporcional a su población en cada instante.

Admitamos que el encuentro de las dos especies sea al azar, entonces cuanto mayor sea el número de presas más fácil será encontrarlas y cuanto más depredadores más alimentos serán necesarios.

Se modela los encuentros posibles por el término  $xy$ , entonces el sistema Presa-Depredador simplificado por las anteriores imposiciones, es dado por,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (1)$$

Como los puntos de equilibrio se calculan igualando a cero las derivadas, las posiciones de equilibrio del sistema (2.1) son  $(0,0); (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

El objetivo ahora es analizar el comportamiento de las trayectorias en una vecindad de esos puntos y tener más claridad del comportamiento futuro del sistema.

El patrón en las variaciones de los tamaños de las poblaciones se puede repetir, cuando las condiciones permanecen constantes el proceso continúa en ciclo ecológico, razón por la cual las trayectorias serán periódicas.

El sistema (2.1) es un sistema no lineal, aunque puede ser integrado separando las variables, pero eso no ofrecerá las informaciones que buscamos, por lo que haremos un estudio cualitativo de las trayectorias.

El comportamiento de las trayectorias del modelo Presa-depredador tiene las siguientes características en las diferentes regiones del primer cuadrante del plano:

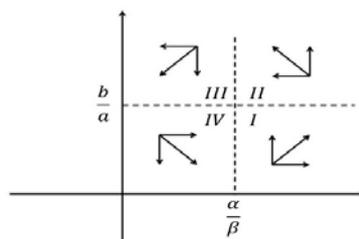
**Región 1:**  $\left(\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dy}{dt} > 0\right)$ : Cuando la población de presas aumenta en tamaño, las especies depredadoras se volverán más numerosas por tener una base alimentaria mayor, con un cierto retraso en el tiempo;

**Región 2:**  $\left(\frac{dx}{dt} < 0, \frac{dy}{dt} > 0\right)$ : La creciente demanda de alimento reduce la población de las presas y las especies depredadoras tienen su crecimiento íntimo;

**Región 3:**  $\left(\frac{dx}{dt} < 0, \frac{dy}{dt} < 0\right)$ : El alimento se escasea para las especies de depredadores y como consecuencia presentan una reducción en tamaño;

**Región 4:**  $\left(\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dy}{dt} < 0\right)$ : La reducción de los depredadores favorece a la población de las presas que, lentamente, empiezan a crecer.

Como el modelo sólo tiene sentido real en el primer cuadrante, expresamos a continuación el campo de velocidades del modelo Presa-depredador en cada una de las regiones antes indicadas en el primer cuadrante del plano cartesiano:



**Figura 1: Campo de velocidades del modelo presa-depredador.**

Se puede percibir que una vecindad de la posición de equilibrio  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  da la idea de una rotación en el entorno de ese punto, indicado por las velocidades de fase del sistema; así el proceso continúa en forma cíclica, lo cual hace que las trayectorias sean periódicas o espirales que se aproximan a trayectorias periódicas.

**Ejemplo 1:** Sea el sistema de ecuaciones que simula el proceso Presa-depredador para dos especies dadas,

$$\begin{cases} x' = 3x - xy \\ y' = -2y + xy \end{cases}$$

El gráfico de las trayectorias de fase en una vecindad del punto considerando diferentes condiciones iniciales es indicado a continuación, las cuales son trayectorias cerradas conteniendo en su interior la posición de equilibrio antes indicada; Que corrobora lo que habíamos indicado antes al analizar el comportamiento posible de las trayectorias del sistema que modela el proceso.

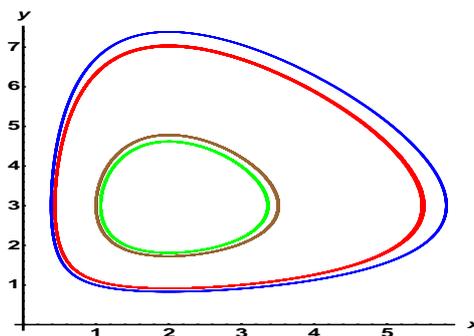


Figura 2: Gráfico del ejemplo del modelo presa-depredador.

Aquí nos limitamos a realizar sólo un análisis gráfico del posible comportamiento de las trayectorias del sistema que modela el proceso Presa-depredador, el tratamiento analítico para diferentes posibles sistemas serán presentados a continuación.

#### 4 ANÁLISIS CUALITATIVO

Para analizar el comportamiento de las trayectorias del sistema (2.2) en el punto  $P_1(0,0)$ , Determinaremos los valores propios de la matriz de la parte lineal del sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -cy \end{cases}$$

La función característica tiene la forma,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)(-c - \lambda) = 0,$$

O sea, sus valores propios son,  $\lambda_1 = a$  e  $\lambda_2 = -c$ , por tanto Por el método de primera aproximación se concluye que el punto  $P_1(0,0)$  es una posición de equilibrio inestable, pues tiene un valor propio positivo.

Para hacer el análisis en el punto,  $P_2(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  Es necesario trasladar el origen de coordenadas al punto

$P_2$ , haciendo uso de la siguiente transformación de coordenadas,

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{c}{d} \\ y = y_1 + \frac{a}{b} \end{cases} \quad (2)$$

Derivando la transformación (2.2) teniendo en cuenta el sistema (2.1) se obtiene el sistema,

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{bc}{d} y_1 - bx_1 y_1 \\ y_1' = \frac{da}{b} x_1 + dx_1 y_1 \end{cases} \quad (3)$$

La función característica del sistema (2.3) tiene la forma,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + ac = 0$$

Por tanto, se tienen los valores propios imaginarios puros,  $\lambda_1 = \sqrt{aci}$  y  $\lambda_2 = -\sqrt{aci}$ , por lo que usando el método de primera aproximación no se puede dar ninguna conclusión con relación al comportamiento de las trayectorias, pues los valores propios tienen parte real nula, no obstante en una vecindad del punto  $P_2\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  se puede decir que las soluciones son oscilantes.

## 5 FORMA NORMAL

Por ser un caso dudoso será necesario llevar el sistema a una forma más simplificada que en ese caso será la forma normal, para así poder llegar a alguna conclusión con relación al crecimiento de las poblaciones de las especies.

### Teorema 2.1

La transformación lineal no degenerada,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sqrt{aci} & bc \\ ad & d\sqrt{aci} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

reduce el sistema (2.3) al sistema,

$$\begin{cases} x_2' = i\sqrt{ac}x_2 + X_2(x_2, y_2) \\ y_2' = -i\sqrt{ac}y_2 + Y_2(x_2, y_2) \end{cases} \quad (5)$$

donde,

$$X_2(x_2, y_2) = \left(\frac{abd}{2} + \frac{bd\sqrt{aci}}{2}\right)x_2^2 - \left(\frac{bd\sqrt{ac}}{2} + \frac{bcd}{2}\right)x_2 y_2 + \left(\frac{bcd}{2} + \frac{bcd\sqrt{aci}}{2a}\right)y_2^2$$

$$Y_2(x_2, y_2) = \left(\frac{abd}{2} + \frac{abd\sqrt{aci}}{2c}\right)x_2^2 - (ad^2 - d\sqrt{aci})x_2 y_2 + \left(\frac{bcd}{2} + \frac{d^2\sqrt{aci}}{2}\right)y_2^2$$

### Demostración

Derivando la transformación (2.4) a lo largo de las trayectorias del sistema (2.3) se llega al sistema (2.5).

### Teorema 2.2

La transformación de coordenadas,

$$\begin{cases} x_2 = x_3 + h_1(x_3, y_3) \\ y_2 = y_3 + h_2(x_3, y_3) \end{cases} \quad (6)$$

reduce el sistema (2.5) a la forma cuasi-normal combinada,

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = i\sqrt{ac}x_3 + x_3P(x_3, y_3) \\ \dot{y}_3 = -i\sqrt{ac}y_3 + y_3\bar{P}(x_3, y_3) \end{cases} \quad (7)$$

### Demostración

Derivando a transformação (2.6) ao longo das trajetórias dos sistemas (2.5) e (2.7), obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} (p_1 - p_2 - 1)i\sqrt{ac}h_1 + x_3P = X_2(x_3 + h_1, y_3 + h_2) - \frac{\partial h_1}{\partial x_3}(x_3P) - \frac{\partial h_1}{\partial y_3}(y_3\bar{P}) \\ (p_1 - p_2 + 1)i\sqrt{ac}h_2 + y_3\bar{P} = Y_2(x_3 + h_1, y_3 + h_2) - \frac{\partial h_2}{\partial x_3}(x_3P) - \frac{\partial h_2}{\partial y_3}(y_3\bar{P}) \end{cases} \quad (8)$$

El sistema (2.8) permite determinar las series  $h_1$ ,  $h_2$  y  $P$ , pues todo lo demás es conocido, además de los coeficientes de  $P$  y  $\bar{P}$ . Son resonantes sus términos son tales que  $p_1 = p_2 + 1$  y  $p_2 = p_1 + 1$  entretanto los de  $h_1$  y  $h_2$  son no resonantes, así se concluye que,

$$\begin{aligned} h_1(x_3, y_3) &= \frac{1}{4} \left[ (abd + bd\sqrt{aci})x_3^2 - (bcd + bd\sqrt{ac})x_3y_3 \right] + (bcd + \frac{bcd\sqrt{aci}}{a})y_3^2 + \dots \\ h_2(x_3, y_3) &= \frac{1}{4} \left[ (abd + \frac{abd\sqrt{aci}}{c})x_3^2 - (bd^2 - d\sqrt{aci})x_3y_3 \right] + (bcd + \frac{d^2\sqrt{aci}}{a})y_3^2 + \dots \\ x_3P(x_3, y_3) &= \frac{1}{2} \left[ (-bcd - bd\sqrt{ac} + abd + \frac{abd\sqrt{aci}}{c})x_3^2y_3 \right] + \dots \\ y_3\bar{P}(x_3, y_3) &= \frac{1}{2} \left[ (-bcd - bd\sqrt{ac} + abd - \frac{abd\sqrt{aci}}{c})x_3y_3^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

### Teorema 2.3

Para que la posición de equilibrio  $P_2(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  del sistema (2.3) sea asintóticamente estable es suficiente que,

$$a < c + \sqrt{ac}.$$

### Demostración

Sea la función de Lyapunov definida positiva,

$$V(x_3, y_3) = x_3y_3.$$

La derivada de  $V(x_3, y_3)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (2.7) está dada por la siguiente expresión,

$$\frac{dV}{dt}(x_3(t), y_3(t)) = bd(a - c - \sqrt{ac})x_3^2y_3^2 + \dots$$

Esto indica que se cumple la condición  $a < c + \sqrt{ac}$ , la derivada es negativa, queda así probado el teorema.

### RESUMIENDO

Se puede percibir que las trayectorias oscilan en una vecindad de la posición de  $P_2(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ , por lo que el número de presas y depredadores no se alejará mucho de esos valores.

Si se introduce en el sistema el factor de pesca, la población de presas disminuye a una tasa de  $Ex(t)$  y la población de predadores disminuye a una tasa de  $Ey(t)$ , donde  $E$  es la medida del esfuerzo pesquero, así se tendrá que el sistema adopta la forma,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - E)x - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -(\alpha + E)y + \beta xy \end{cases}$$

En los modelos presa-depredador que estudiamos no se tuvo en cuenta un hecho importante como es la interacción de los animales de una misma especie, que compiten por la misma fuente de alimentación, provocando, por ejemplo, que una especie tienda a la extinción, sin embargo que la otra se aproxima a su capacidad máxima, bien pudiera ocurrir que las dos especies, en función de los recursos disponibles, tienden a un estado de equilibrio.

Para poner de manifiesto estos diversos comportamientos, vamos a construir un nuevo modelo cambiando ligeramente las hipótesis del modelo presa-depredador. Es decir, si ha introducido la interacción entre las presas en la lucha por el espacio y la alimentación. Esto traerá una nueva dinámica de las especies, donde aquí intervienen otros parámetros a tener en cuenta.

### 6 CASO DE COMPETICION DE LAS PRESAS

Si la alimentación de las presas no es ilimitada, entonces se puede presentar la situación de que al incrementarse mucho existe competencia entre ellas por la alimentación, así tiene que ser contemplado en ese modelo esa nueva situación, así aparecerá un nuevo factor que influenciará en la convivencia, Sea el sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - cx^2 \\ \frac{dy}{dt} = -dy + exy \end{cases} \quad (9)$$

#### Observación:

Es evidente que en el caso de los predadores la competencia por la alimentación es significativa en el modelo, por lo que es reflejado en la parte lineal de la función desconocida que representa a la especie.

Estas nuevas condiciones en el proceso hacen que para el sistema existan dos posiciones de equilibrio, que son los puntos,  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(\frac{d}{e}, \frac{ae - cd}{be})$  y  $P_3(\frac{a}{c}, 0)$  Para que el punto  $P_2$  En el primer cuadrante es necesario que  $ac > cd$ ; el punto  $P_3$  por tener las características que el depredador desaparece no es muy interesante, por eso no nos referiremos a él.

El análisis de las trayectorias en una vecindad del punto  $P_1(0,0)$  se hace por el método de la primera aproximación, el cual coincide con el realizado anteriormente, donde se concluyó que es un punto inestable.

Para hacer el análisis en el punto  $P_2\left(\frac{d}{e}, \frac{ae-cd}{be}\right)$  es necesario trasladar el origen de coordenadas al punto  $P_2\left(\frac{d}{e}, \frac{ae-cd}{be}\right)$ , y así por la transformación de coordenadas,

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{d}{e} \\ y = y_1 + \frac{ae-cd}{be} \end{cases} \quad (10)$$

Se obtiene el sistema,

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{cd}{e}x_1 - dy_1 - bx_1y_1 - cx_1^2 \\ y_1' = \frac{ae-cd}{b}x_1 + ex_1y_1 \end{cases} \quad (11)$$

En este caso el sistema de primera aproximación tiene la forma,

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{cd}{e}x_1 - dy_1 \\ y_1' = \frac{ae-cd}{b}x_1 \end{cases} \quad (12)$$

Y la ecuación característica del sistema (7) tiene la forma,

$$\begin{vmatrix} -\frac{cd}{e} - \lambda & -d \\ \frac{ae-cd}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{cd}{e}\lambda + \frac{d(ae-cd)}{b} = 0$$

Es evidente que los valores propios de la matriz tienen una parte real negativa y por tanto constituye una posición de equilibrio estable, eso quiere decir que los pares ordenados formados por las presas y los depredadores están en una vecindad del punto  $P_2\left(\frac{d}{e}, \frac{ae-cd}{be}\right)$  y para un tiempo suficientemente grande cada vez quedará más cerca de ese punto.

También existe un modelo más general propuesto por Kolmogorov, el cual tiene la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) \end{cases}$$

Donde  $f$  y  $g$  deben satisfacer relaciones consistentes con la naturaleza del sistema Presa-depredador; en ese caso se percibe que todos los sistemas anteriores son casos particulares.

## 7 MODELO DE TRES ESPECIES

En el estudio de la interacción de diferentes especies en la naturaleza en los últimos tiempos ha sido muy importante el modelado matemático, pues eso ha permitido poder hacer predicciones con relación al comportamiento futuro de ese proceso de convivencia, determinando si alguna especie podría entrar en algún momento en peligro de extinción; todo esto es importante, pues de esa manera se sabe cuando se podrá introducir algún elemento artificial como pesca o casa según sea el caso.

Existen innumerables casos de interacción entre tres especies donde aparece una presa nata y un predador nato, y una Presa-depredador, pero se puede dar la situación que el predador nato se alimenta o no de la presa nata, en ese modelo que presentamos la continuación, el predador nato no se alimenta de la presa nata; no obstante existen múltiples casos donde esto ocurre; por ejemplo, el caso del gavián, el ratón y el pollito donde el gavián se alimenta tanto del ratón como del pollito, y el ratón se alimenta del pollito.

En el modelo consideraremos que entre las presas existe competencia bien por el espacio o por la conquista de la alimentación; Las Presa-depredadoras sin la presencia de la presa desaparece, tanto por la falta de alimento, como por la presencia del depredador nato; El depredador nato sin la presencia de la Presa-depredador irá a la extinción; aquí se supone además que no existe interacción con otra especie.

Para el desarrollo del modelo consideraremos las siguientes variables:

$x = x(t)$  - concentración de las presas natas en el momento  $t$ .

$y = y(t)$  - concentración de las presas-predadoras en el momento  $t$ .

$z = z(t)$  - concentración del depredador nato en el tiempo  $t$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x - a_2xy - a_3x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -b_1y + b_2xy - b_3yz \\ \frac{dz}{dt} = -c_1z + c_2yz \end{cases} \quad (13)$$

Com las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ ; en el modelo estamos considerando que los coeficientes son todos positivos. Este sistema tiene tres posiciones de equilibrio que son las siguientes::

$$(0,0,0), \left( \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1b_2 - a_3b_1}{a_2b_2}, 0 \right) \text{ y } \left( \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_3c_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{b_2(a_1c_2 - a_2c_1) - a_3b_1c_2}{a_3b_3c_2} \right)$$

Para que estas posiciones de equilibrio estén en el primer octante es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1)  $a_1b_2 > a_3b_1$ ,
- 2)  $a_1c_2 > a_2c_1$ ,
- 3)  $a_1b_2c_2 > a_3b_1c_2 + a_2b_2c_1$ .

Es evidente que la posición de equilibrio  $(0,0,0)$ , es inestable, pues se puede aplicar directamente el método de primera aproximación, existiendo un valor propio positivo; lo que indica que las especies no tendrán concentraciones cerca de la nula; como para el segundo caso por tener un componente nulo, provocaría un desequilibrio ecológico, no sería muy interesante su estudio.

Para el estudio de la tercera posición de equilibrio es necesario realizar una transformación de coordenada para llevar el origen a esa posición, así que habría que hacer la transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \\ z = z_1 + l \end{cases} \quad (14)$$

Donde

$$(h, k, l) = \left( \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_3c_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{b_2(a_1c_2 - a_2c_1) - a_3b_1c_2}{a_3b_3c_2} \right).$$

Derivando la transformación (14) teniendo en consideración el sistema (13), obtenemos el sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{c_2}x_1 - \frac{a_2(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_3c_2}y_1 - a_2xy - a_3x^2 \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{b_2c_1}{c_2}x_1 - \frac{b_3c_1}{c_2}z_1 + b_2x_1y_1 - b_3y_1z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = \frac{b_2a_1c_2 - b_2a_2c_1 - a_3b_1c_2}{a_3b_3}y_1 + c_2y_1z_1 \end{cases} \quad (15)$$

La función característica del sistema (15) tiene la forma,  $\lambda^3 + n_1\lambda^2 + n_2\lambda + n_3 = 0$ , donde

$$n_1 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{c_2},$$

$$n_2 = \frac{a_1b_2c_1c_2 - a_2b_2c_1^2 - a_3b_1c_1c_2 + a_1a_2b_2c_1c_2 - a_2^2b_2c_1^2}{a_3c_2^2},$$

$$n_3 = \frac{-a_1a_2b_2c_1^2c_2 + a_2^2b_2c_1^3 + a_2a_3b_1c_1^2c_2 + a_1^2b_2c_1c_2^2 - a_1a_2b_2c_1^2c_2 - a_1a_3b_1c_1c_2^2}{a_3c_2^2}$$

Para que todos los valores propios tengan una parte real negativa es necesario y suficiente que todos los menores diagonales de la siguiente matriz ( $H$ ) de Hurwitz sean positivos.

$$H = \begin{bmatrix} n_1 & 1 & 0 \\ n_3 & n_2 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}.$$

De aquí se deduce que,  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $n_3 > 0$  y  $n_1n_2 = n_3$ .

### Ejemplo 2:

Dado el siguiente sistema que cumple las condiciones del sistema Presa-depredador, analizar sus soluciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy - yz \\ \frac{dz}{dt} = -z + yz \end{cases} \quad (16)$$

Las posiciones de equilibrio del sistema (16) son los puntos:  $(0,0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$  y  $(1,1,1)$ .

No tiene mucha importancia el análisis en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ , pues sería en una vecindad donde la concentración de los predadores natos es muy pequeña; Además, en el punto  $(0,0,0)$  la solución es inestable, pues tiene un valor propio positivo.

Para analizar las trayectorias en el punto,  $(1,1,1)$  necesitamos efectuar una traslación del origen de coordenada al punto  $(1,1,1)$ . El cambio de variables,

$$\begin{cases} x = x_1 + 1 \\ y = y_1 + 1 \\ z = z_1 + 1 \end{cases}$$

Transforma el sistema (16) en el sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - y_1 - x_1 y_1 - x_1^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2x_1 - z_1 + 2x_1 y_1 - y_1 z_1 \\ \frac{dz}{dt} = y_1 + y_1 z_1 \end{cases} \quad (17)$$

Donde la función característica tiene la forma,

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

En este caso para analizar la señal de la parte real de las raíces del polinomio característico es necesario aplicar el teorema de Hurwitz; la matriz de Hurwitz asociada al polinomio,  $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 1$ , es,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em este caso para que se cumplan las condiciones del teorema se satisfacen :  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $n_3 > 0$  y  $n_1 n_2 > n_3$

Esto garantiza que los valores propios tienen partes real negativas lo que garantiza la estabilidad de la posición de equilibrio (1,1,1).

## 8 CONCLUSIONES

Por lo visto se puede decir que las trayectorias del sistema son decrecientes y que para un tiempo suficientemente grande se aproximan a la posición de equilibrio; ninguna de las especies aumentará o disminuirá de forma desproporcionada.

## REFERENCIAS

1. BESSANEZI, Rodney Carlos. “*Modelagem Matemática*”. São Paulo.2004.
2. RUNJIE Wu “El modelo presa depredador y sus aplicaciones a la Economía”. 2014.
3. RODRIGUEZ, Luiz A. D; DIOMAR C. Mistro; ANDRADE, Carina L. “Sistema Presa-Predador com Duas Escalas de Crescimento: Presa Rápida-Predador Lento” *Biomatemática*. IMECC. UNICAMP. (2010).
4. ALTAIR, Santos de Oliveira Sobrinho, Camila Fogaça de Oliveira, Carolina Massae Kita, Érica Regina Takano Natti, Paulo Laerte Natti. “*Modelagem Matemática e Estabilidade de Sistemas Predador-Presa*” Universidade Estadual de Londrina, Londrina. (2016).
5. OLIVEIRA, C.F. “*Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia*, Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Editora Universidade Estadual de Londrina, Londrina, (2011)

6. SANCHEZ, S; RUIZ, A. I.; FERNANDEZ, A. “Un modelo de los procesos moleculares de la polimerización y cristalización de la Hemoglobina S”, Rev. Ciencias Matemáticas. 26 (2012), No. 1, pp 53 -- 57.
7. SANCHEZ, S., FERNANDEZ, G. A. A., RUIZ. A. I., & CARVALHO, E. F.” Modelo de la sicklemlia con coeficientes periódicos en la función de polimerización”.Ciencia e Tecnica Vitivinicola Journal, (2016).
8. LOPEZ, J. M., & BLE, G. G. *Modelo Depredador - Presa*. (2008). Revista de Ciencias Básicas UJAT, 7 (2), 25 - 34.