

# Modelos de poblaciones en interacción

(Presa-Predador)

MODELOS Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS BIOLÓGICOS



# Contenidos

1

## Introducción

Interacciones entre especies

2

## Modelo de Lotka-Volterra

3

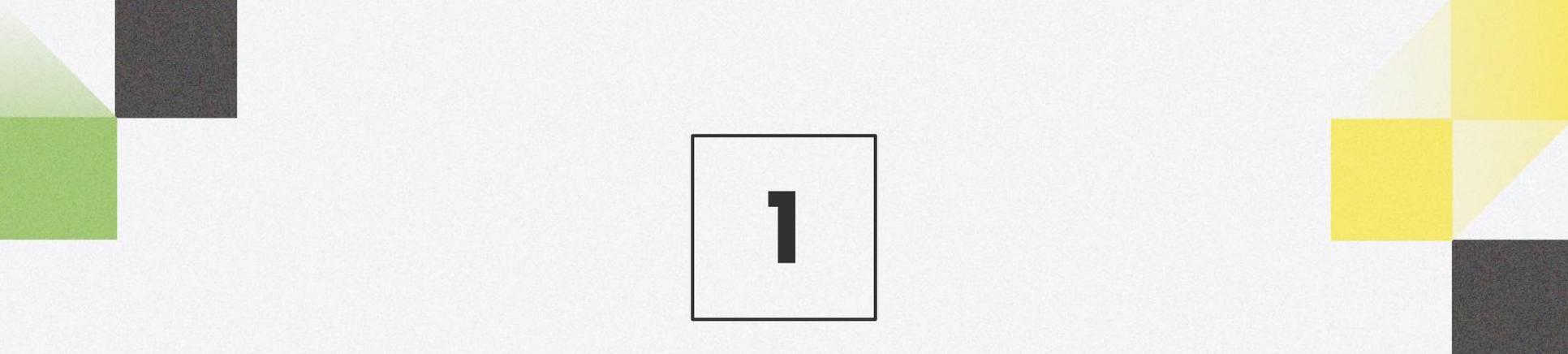
## Modelo de Lotka-Volterra con limitación de herbívoros

4

## Tarea

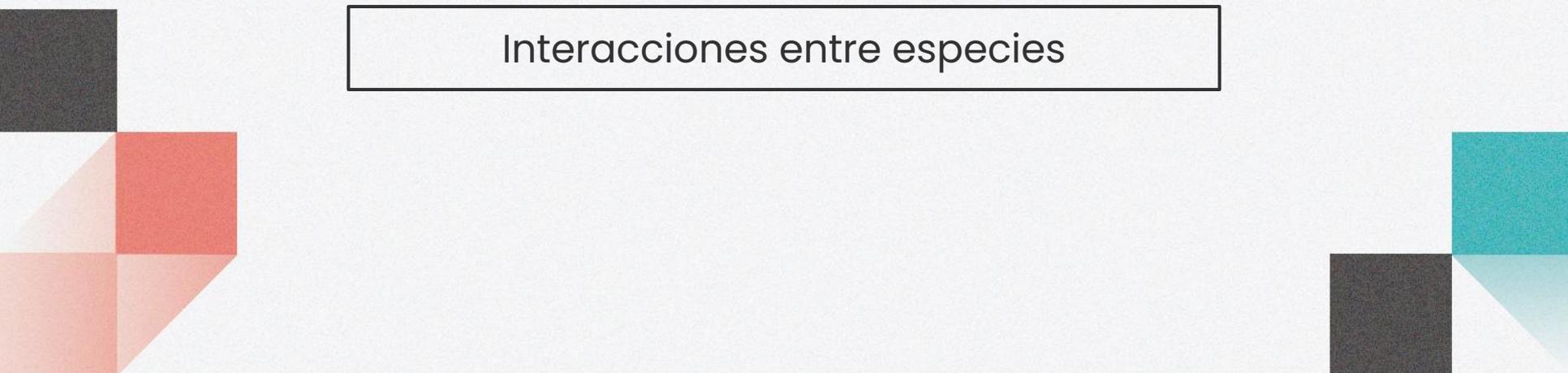
Entregas pasadas y futuras





**1**

# Introducción



Interacciones entre especies

# Modelado de poblaciones

01



**CONTINUOS PARA  
UNA SOLA ESPECIE**

Exponencial  
Logístico

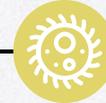
Modelos continuos  
*no lineales* de  
interacciones:  
Presa-Predador



**PARA POBLACIONES  
EN INTERACCIÓN**

02

03



**EPIDEMIOLÓGICOS**

SIR  
SEIR

# Introducción

- Los organismos vivientes se desarrollan dentro de comunidades ecológicas, en redes de interacciones directas e indirectas con otras criaturas vivientes, en un área geográfica definida.

# Introducción

- Los organismos vivos se desarrollan dentro de comunidades ecológicas, en redes de interacciones directas e indirectas con otras criaturas vivientes, en un área geográfica definida.
- Interacciones de las especies  ciclo de nutrientes, redes tróficas

# Introducción

- Los organismos vivos se desarrollan dentro de comunidades ecológicas, en redes de interacciones directas e indirectas con otras criaturas vivientes, en un área geográfica definida.
- Interacciones de las especies  ciclo de nutrientes, redes tróficas
- Interacciones ecológicas:
  - **Interacciones intraespecíficas:** entre individuos de la misma especie
  - **Interacciones interespecíficas:** entre 2 o más especies.

# Introducción

## Tipos de interacciones en comunidades ecológicas

Interacción	Descripción	Efecto
Competencia	Interacción de individuos que compiten por un recurso común que tiene una oferta limitada. Superposición de nichos.	⊖ / ⊖
Depredación	Un individuo (depredador), mata y se come todo o una parte de otro individuo (presa). Caso especial: herbivoría (no siempre conduce a la muerte). Si es intraespecífica: canibalismo	⊖ / ⊕
Simbiosis	Dos o más especies viven en contacto directo a largo plazo. Tipos:	
	Mutualismo	⊕ / ⊕
	Comensalismo	⊕ / 0
	Parasitismo	⊖ / ⊕

# Introducción

## Tipos de interacciones en comunidades ecológicas

Interacción	Descripción	Efecto
Competencia	Interacción de individuos que compiten por un recurso común que tiene una oferta limitada. Superposición de nichos.	⊖ / ⊖
Depredación	Un individuo (depredador), mata y se come todo o una parte de otro individuo (presa). Caso especial: herbivoría (no siempre conduce a la muerte). Si es intraespecífica: canibalismo	⊖ / ⊕
Simbiosis	Dos o más especies viven en contacto directo a largo plazo. Tipos:	
	Mutualismo	⊕ / ⊕
	Comensalismo	⊕ / 0
	Parasitismo	⊖ / ⊕

# Introducción

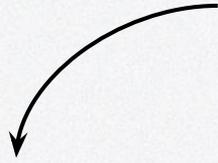
## Depredación



**Presa**



**Depredador**



Cazado y tomado  
como alimento de  
otras especies

# Introducción

## Depredación



**Presa**

Cazado y tomado  
como alimento de  
otras especies

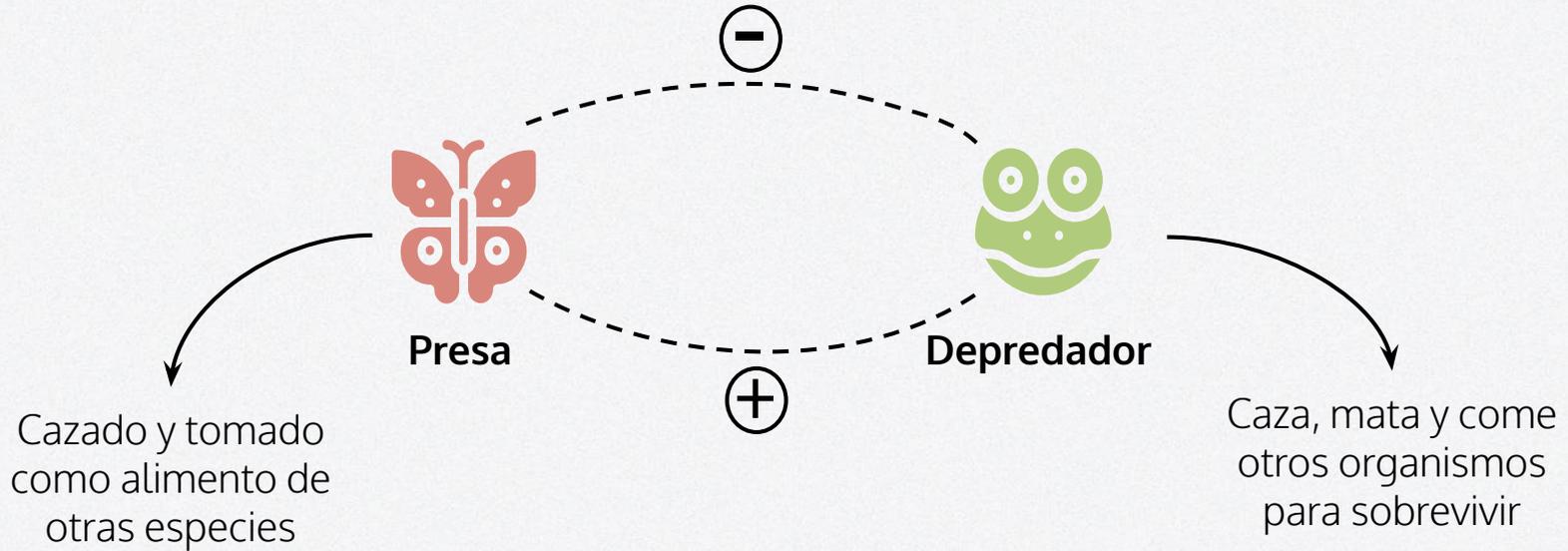


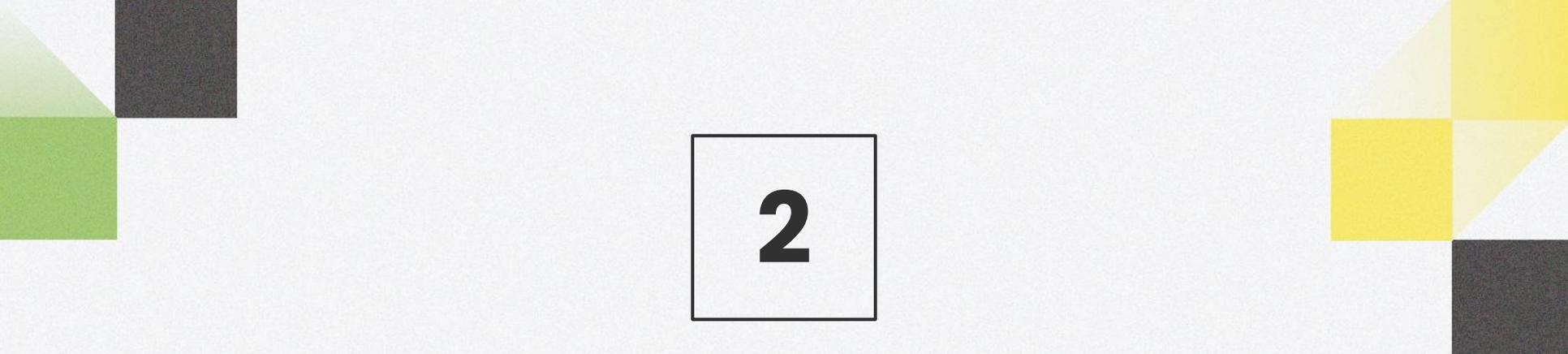
**Depredador**

Caza, mata y come  
otros organismos  
para sobrevivir

# Introducción

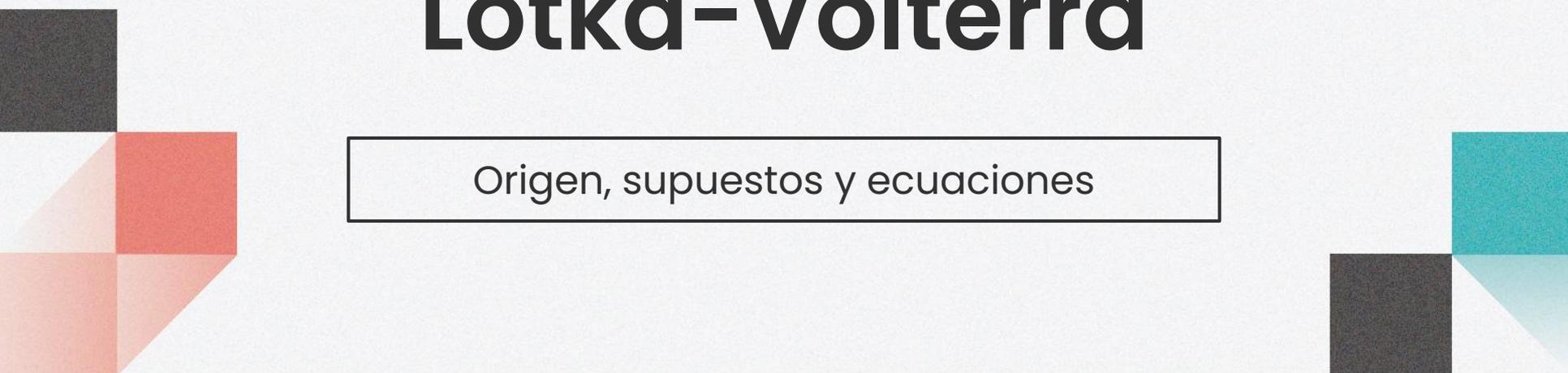
## Depredación





2

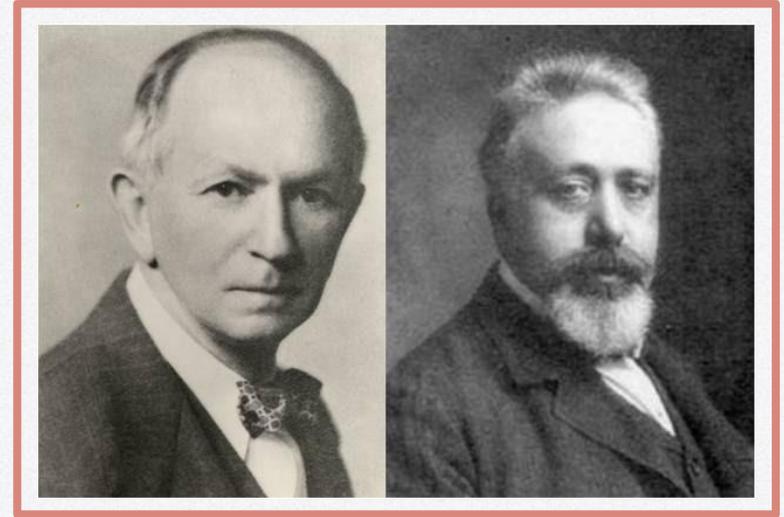
# Modelo de Lotka-Volterra



Origen, supuestos y ecuaciones

# Modelo de presa-predador de Lotka y Volterra

- Describe la evolución de las poblaciones de dos especies (presas y depredadores) en un sistema aislado e incambiante.
- Modelo más simple de interacciones entre presas y depredadores.
- Usado en química, ecología, biomatemática, economía, entre otros.
- Formulado independientemente por Lotka (1925) y Volterra (1926).

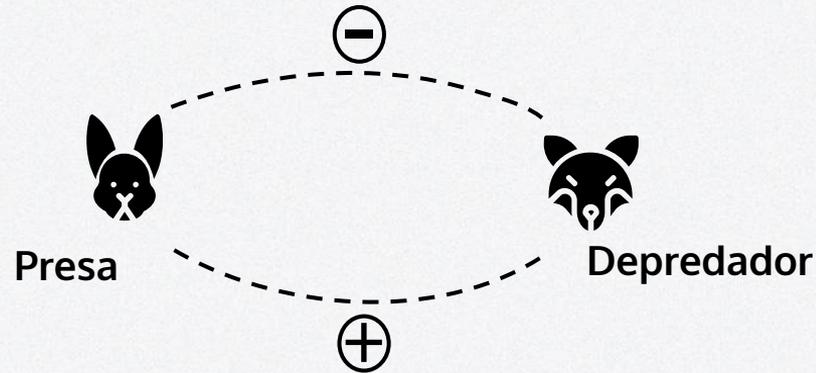


A.J. Lotka

V. Volterra

# Problema

- Se quiere determinar el crecimiento de dos especies en donde una es la fuente de alimento de la otra, y no compiten por los mismos recursos
- $x(t)$ : densidad de la población de presas en el instante  $t$
- $y(t)$ : densidad de la población de depredadores en el instante  $t$



# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de predadores, la densidad de presas crece exponencialmente:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad a > 0$$

$$x = x(t)$$

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de depredadores, la densidad de presas crece exponencialmente:

En presencia de depredadores, la densidad de presas decrece a una tasa proporcional a  $xy$ , donde  $y = y(t)$ .

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de depredadores, la densidad de presas crece exponencialmente:  $\frac{dx}{dt} = ax$ , donde  $x = x(t)$ . En presencia de depredadores, la densidad de presas decrece a una tasa proporcional a  $-axy$ , donde  $x = x(t)$ .
- En ausencia de la presa, la densidad de depredadores decaerá exponencialmente a cero (extinción). En presencia de la presa, la densidad de depredadores crece a una tasa proporcional a  $xy$ .

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de depredadores, la densidad de presas crece exponencialmente:  $\frac{dx}{dt} = ax$ , donde  $x = x(t)$ . En presencia de depredadores, la densidad de presas decrece a una tasa proporcional a  $-ax - bxy$ , donde  $x = x(t)$ .
- En ausencia de la presa, la densidad de depredadores decaerá exponencialmente a cero (extinción). En presencia de la presa, la densidad de depredadores crece a una tasa proporcional a  $xy$ , donde  $y = y(t)$ .
- La tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de depredadores, la densidad de presas crece exponencialmente:  $\frac{dx}{dt} = ax$ , donde  $x = x(t)$ . En presencia de depredadores, la densidad de presas decrece a una tasa proporcional a  $xy$ , donde  $y = y(t)$ .
- En ausencia de la presa, la densidad de depredadores decaerá exponencialmente a cero (extinción). En presencia de la presa, la densidad de depredadores crece a una tasa proporcional a  $xy$ .
- La tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.
- Las presas no compiten por alimento y solo son depredadas por esta población de depredadores.

# Hipótesis

- La presa se alimenta de organismos productores inagotables. El suministro de comida de los depredadores depende enteramente del tamaño de la población de presas.
- En ausencia de depredadores, la densidad de presas crece exponencialmente:  $\frac{dx}{dt} = ax$ , donde  $x = x(t)$ . En presencia de depredadores, la densidad de presas decrece a una tasa proporcional a  $xy$ , donde  $y = y(t)$ .
- En ausencia de la presa, la densidad de depredadores decaerá exponencialmente a cero (extinción). En presencia de la presa, la densidad de depredadores crece a una tasa proporcional a  $xy$ .
- La tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.
- Las presas no compiten por alimento y solo son depredadas por esta población de depredadores.
- Durante el proceso, el ambiente no cambia a favor de una especie y los depredadores siempre tienen hambre.

# Ecuaciones

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

Ecuación del predador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

# Ecuaciones

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

Ecuación del depredador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

- $x$ : número de presas
- $a > 0$ : tasa de crecimiento de las presas
- $b > 0$ : éxito en la caza del depredador, que afecta a la presa
- $bx$ : respuesta funcional del depredador

# Ecuaciones

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

Ecuación del depredador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

- $x$ : número de presas
- $a > 0$ : tasa de crecimiento de las presas
- $b > 0$ : éxito en la caza del depredador, que afecta a la presa
- $bx$ : respuesta funcional del depredador

- $y$ : número de depredadores
- $c > 0$ : tasa de crecimiento de depredadores
- $d > 0$ : éxito en la caza del depredador, que afecta al depredador

# Ecuaciones

Probabilidad de  
encuentro de  
las especies

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

Ecuación del depredador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

- $x$ : número de presas
- $a > 0$ : tasa de crecimiento de las presas
- $b > 0$ : éxito en la caza del depredador, que afecta a la presa
- $bx$ : respuesta funcional del depredador

- $y$ : número de depredadores
- $c > 0$ : tasa de crecimiento de depredadores
- $d > 0$ : éxito en la caza del depredador, que afecta al depredador

$d/b$ : factor de conversión

$$0 < d/b < 1 \Rightarrow 0 < d < b$$

# Puntos de equilibrio y estabilidad

**Equilibrio:** las poblaciones no cambian con respecto al tiempo

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$



# Puntos de equilibrio y estabilidad

**Equilibrio:** las poblaciones no cambian con respecto al tiempo

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

**Soluciones:**

1.  $(x, y) = (0, 0)$
2.  $(x, y) = (c/d, a/b)$



# Puntos de equilibrio y estabilidad

**Equilibrio:** las poblaciones no cambian con respecto al tiempo

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

**Soluciones:**

1.  $(x, y) = (0, 0)$   Extinción
2.  $(x, y) = (c/d, a/b)$



# Puntos de equilibrio y estabilidad

**Equilibrio:** las poblaciones no cambian con respecto al tiempo

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

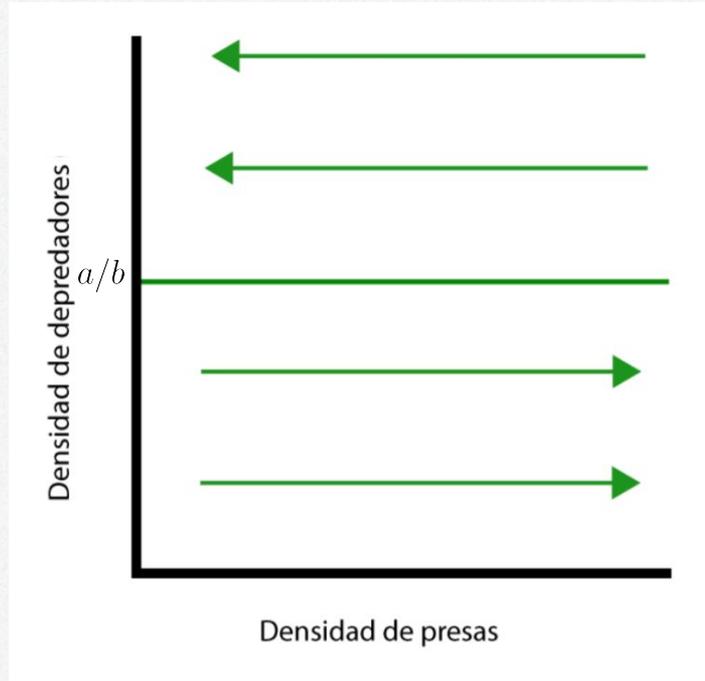
**Soluciones:**

1.  $(x, y) = (0, 0)$   $\longrightarrow$  Extinción
2.  $(x, y) = (c/d, a/b)$   $\longrightarrow$  Ambas poblaciones mantienen sus densidades distintas de cero de forma indefinida.



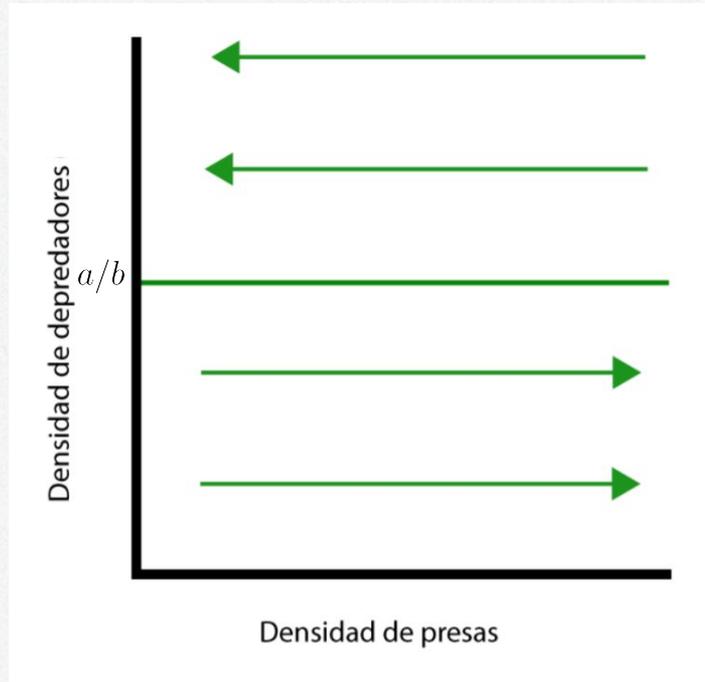
# Isoclinas cero o nuclinas

Presas  $\rightarrow x = 0, y = a/b$

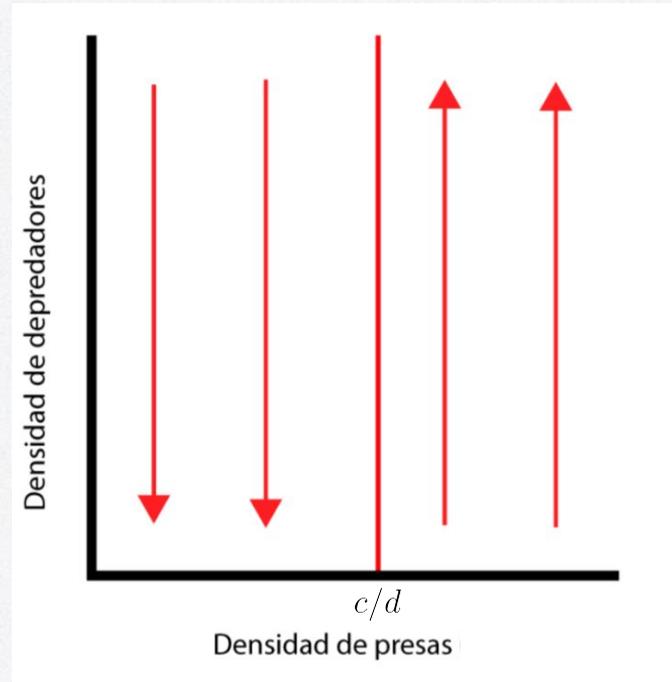


# Isoclinas cero o nuclinas

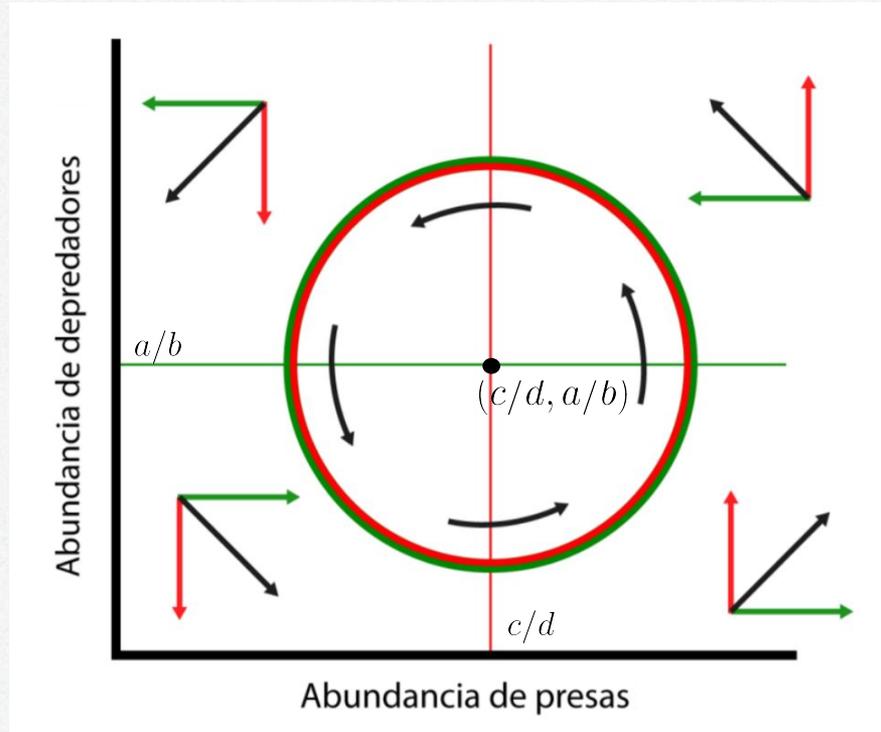
Presas  $\longrightarrow x = 0, y = a/b$



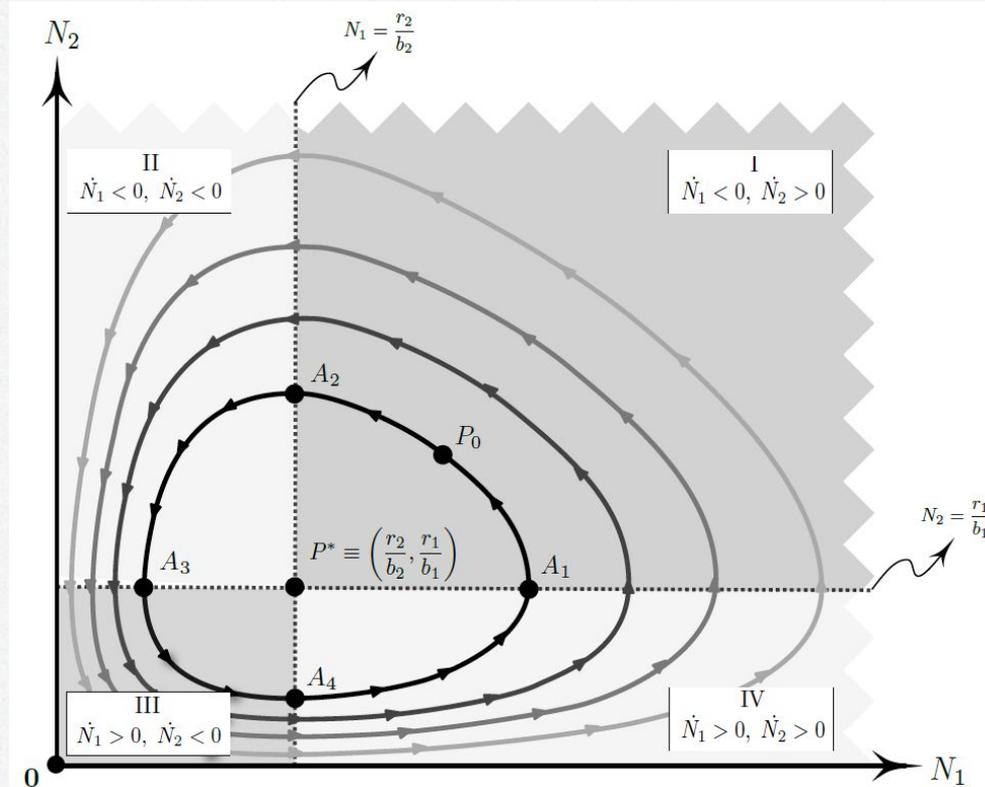
Predadores  $\longrightarrow x = c/d, y = 0$



# Comportamiento de poblaciones conjuntas

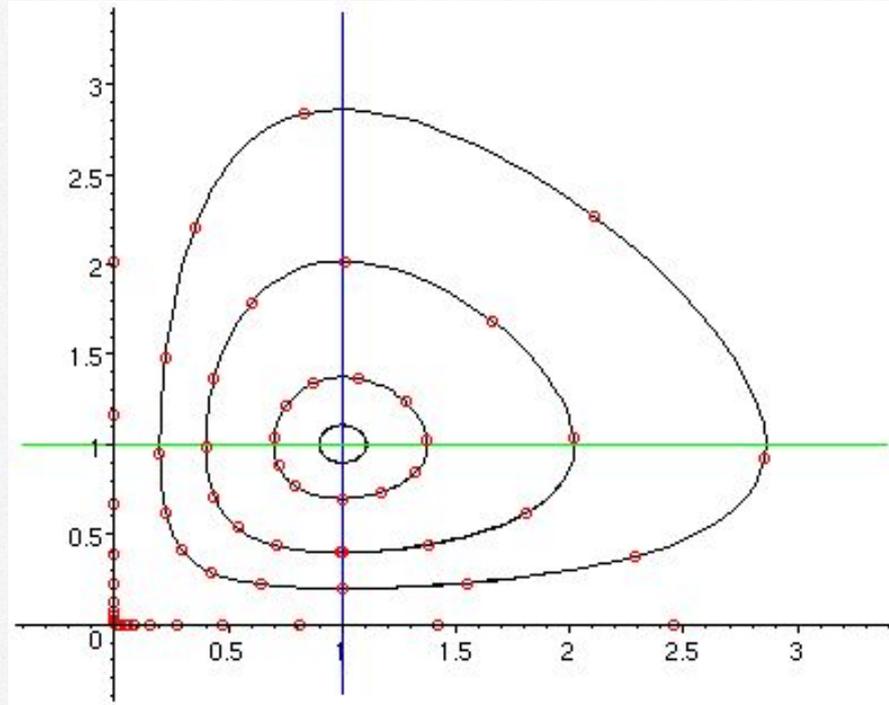


# Trayectorias

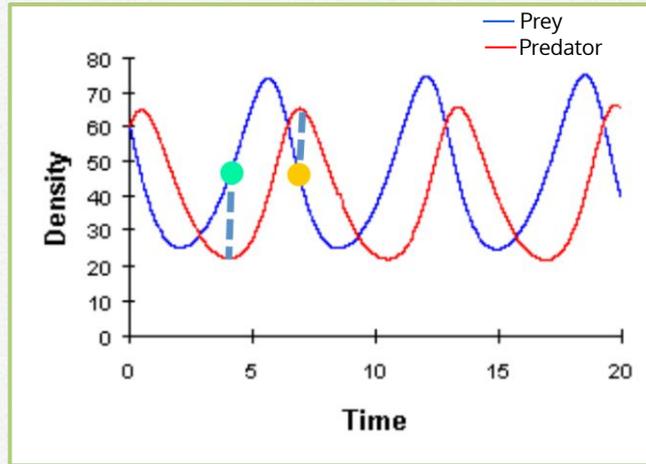


Extraído de: Samanta, G., & Gomez-Aíza, R. (2014). *Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa*.

# Trayectorias

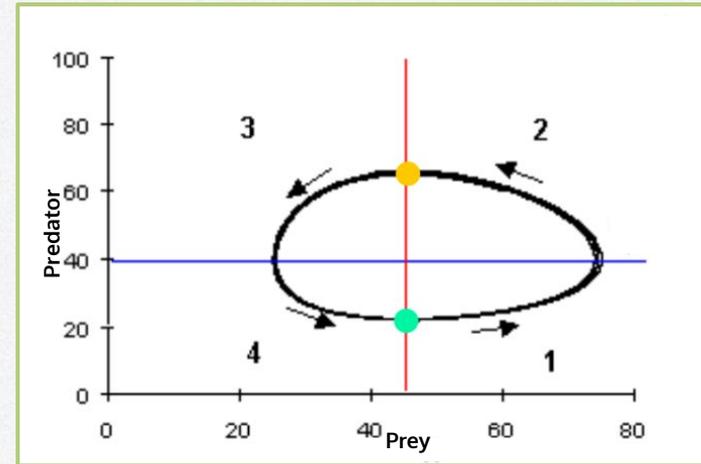


# Modelo de presa-predador de Lotka-Volterra



## Series temporales de densidad de Presa-Depredador

Las poblaciones entran en equilibrio cuando sus tasas de cambio per-cápita resultan nulas



## Espacio de fases Presa vs. Depredador

Las isoclinas denotan estado estacionario (punto de equilibrio). El cruce define cuatro cuadrantes. El modelo no converge al punto de equilibrio y oscila permanentemente (ciclo límite).

# Simulación

**Ecuación de la presa**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

**Ecuación del predador**

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

$$x_0 = 100, y_0 = 100, a = 0.5$$

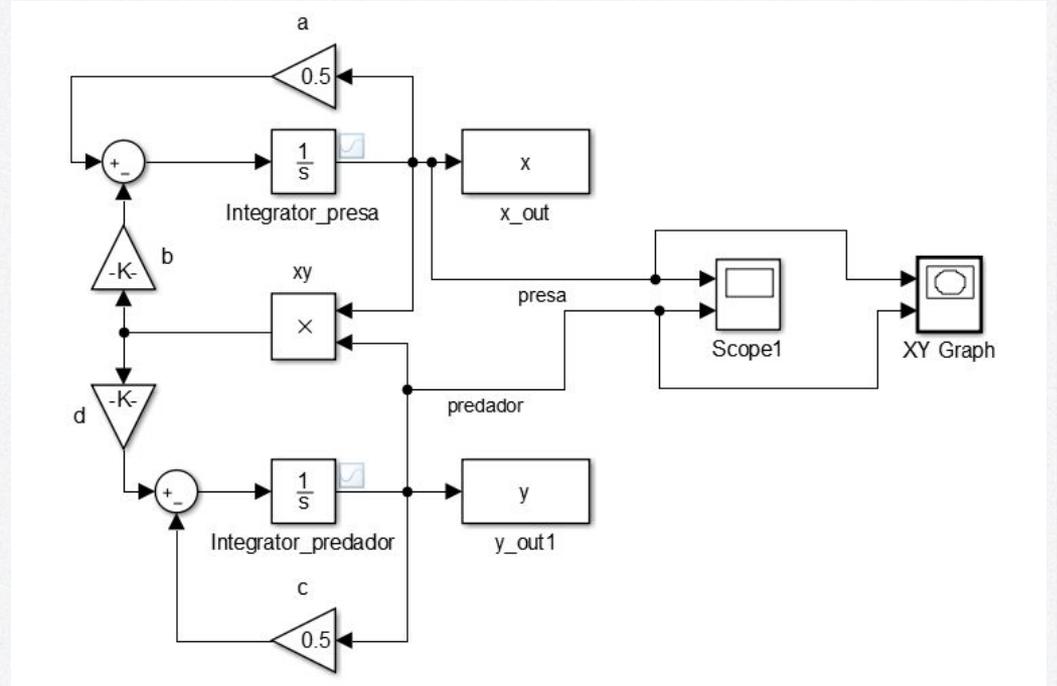
$$c = 0.5, b = 0.02, d = 0.01$$

# Resultados

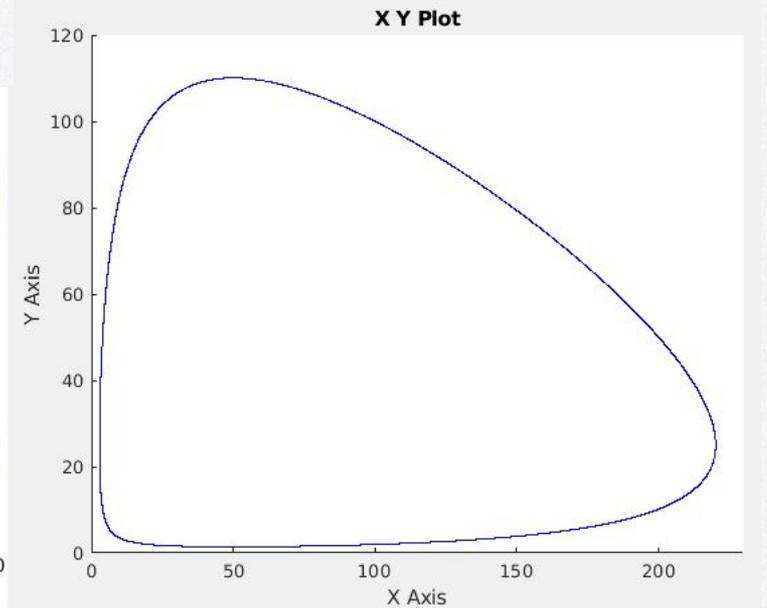
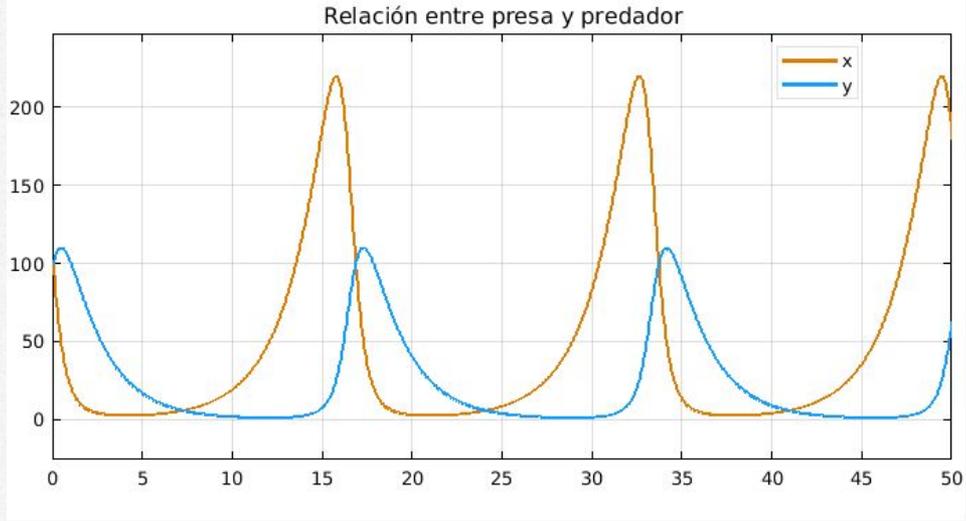
$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

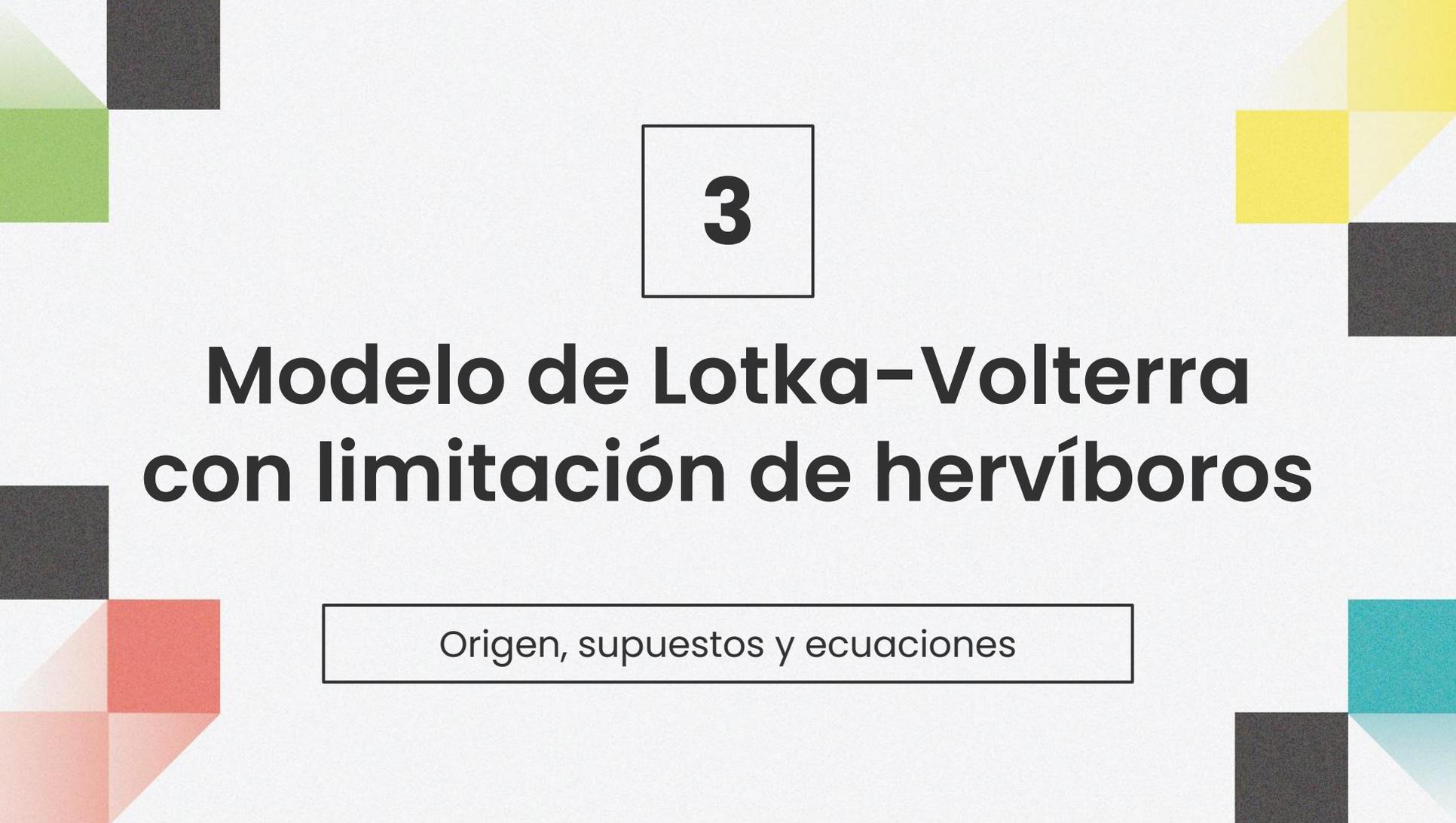
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

$$x_0 = 100, y_0 = 100, a = 0.5, \\ c = 0.5, b = 0.01, d = 0.01$$



# Resultados





**3**

# **Modelo de Lotka-Volterra con limitación de hervíboros**

Origen, supuestos y ecuaciones

# Ecuaciones

- Se incorpora una competencia intraespecífica por recursos en el nivel trófico más bajo, de manera que se limita la existencia de Herbívoros (presa) debida a la lucha por la existencia en un entorno limitado (ecuación logística):



# Ecuaciones



- Se incorpora una competencia intraespecífica por recursos en el nivel trófico más bajo, de manera que se limita la existencia de Herbívoros (presa) debida a la lucha por la existencia en un entorno limitado (ecuación logística):

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \frac{a}{K}x^2$$

Ecuación del predador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

# Ecuaciones



- Se incorpora una competencia intraespecífica por recursos en el nivel trófico más bajo, de manera que se limita la existencia de Herbívoros (presa) debida a la lucha por la existencia en un entorno limitado (ecuación logística):

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \frac{a}{K}x^2$$

Ecuación del predador

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

$K$ : capacidad de carga



Limita el crecimiento de herbívoros que de otra manera sería exponencialmente ilimitado. Es la máxima población de presas que el sistema puede sostener.

# Ecuaciones



- Se incorpora una competencia intraespecífica por recursos en el nivel trófico más bajo, de manera que se limita la existencia de Herbívoros (presa) debida a la lucha por la existencia en un entorno limitado (ecuación logística):

Ecuación de la presa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \frac{a}{K}x^2$$

Ecuación del predador

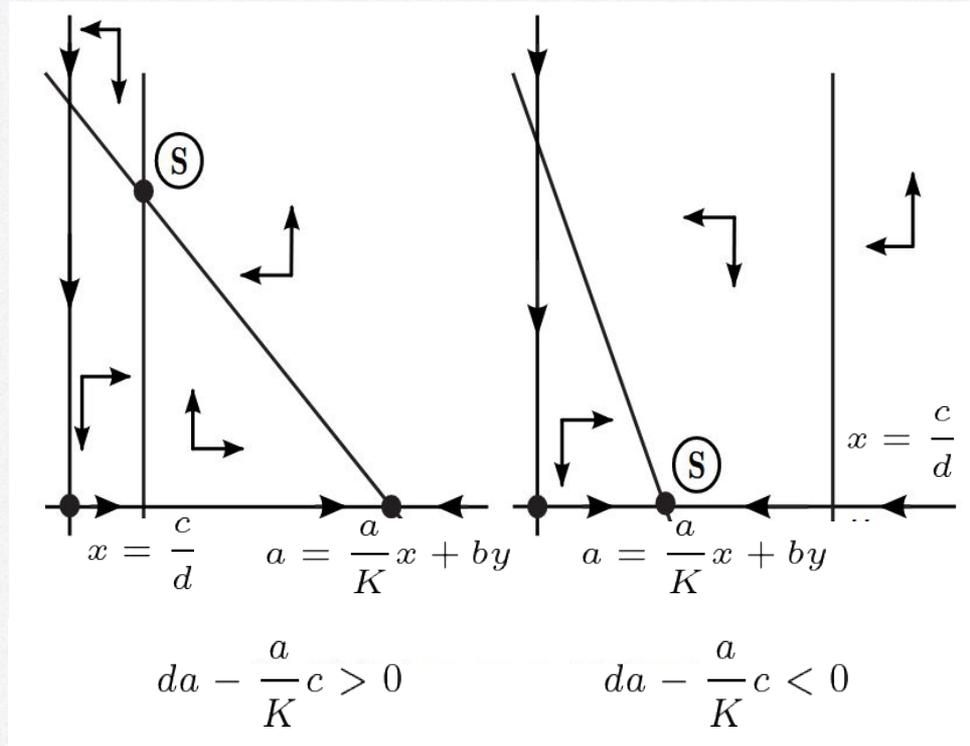
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

$K$ : capacidad de carga

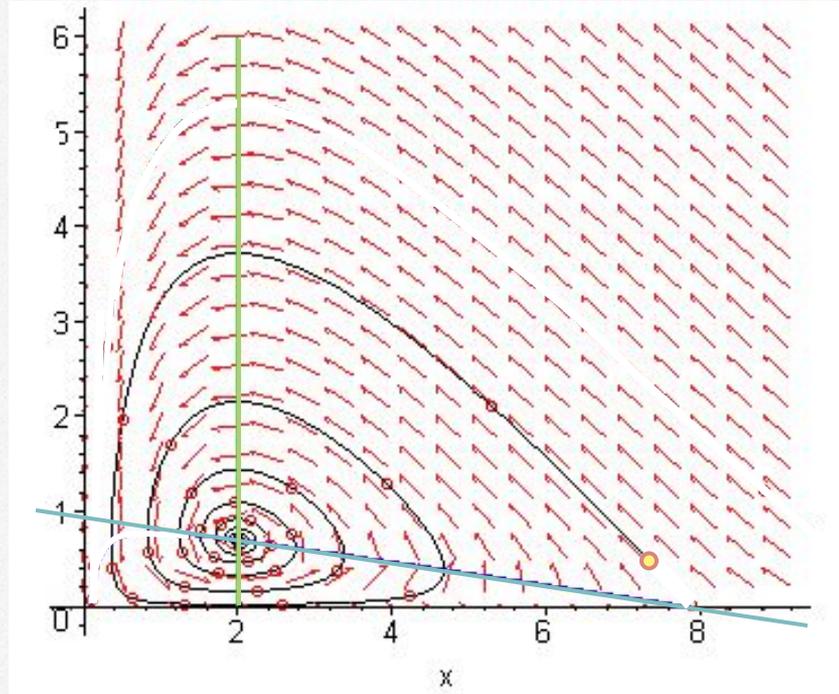
**Isoclina Presas**  $\longrightarrow x = K \left( 1 - \frac{b}{a}y \right)$

# Trayectorias

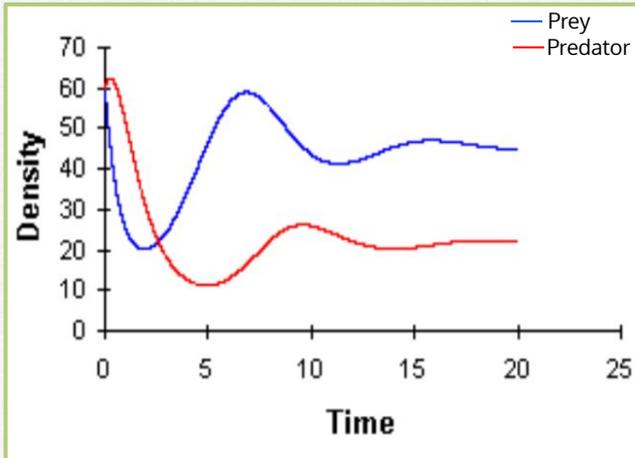
Isoclina Presas  $\longrightarrow x = K \left( 1 - \frac{b}{a}y \right)$



# Trayectorias

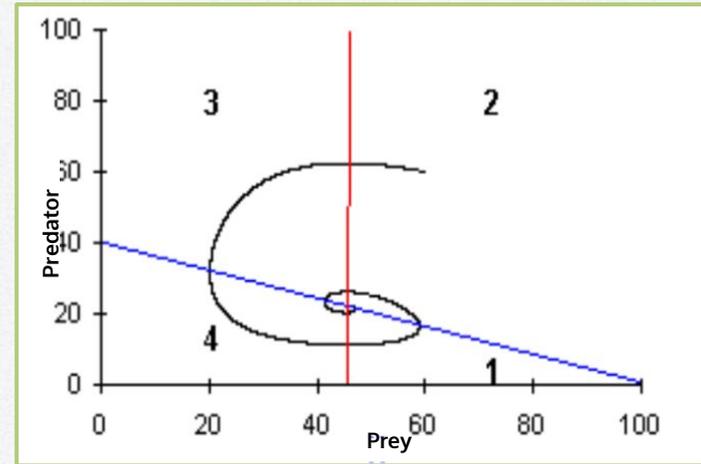


# Modelo de presa-predador de Lotka-Volterra



## Series temporales de densidad de Presa-Depredador

En este caso, la isocлина de los herbívoros presenta pendiente negativa mientras que la de los carnívoros continua como constante



## Espacio de fases Presa vs. Depredador

Las isoclinas denotan estado estacionario. El cruce de estas últimas define cuatro cuadrantes.

El modelo converge al punto de equilibrio

# Simulación

**Ecuación de la presa**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \frac{a}{K}x^2$$

**Ecuación del predador**

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(dx - c)$$

$$x_0 = 100, y_0 = 100, a = 0.5$$

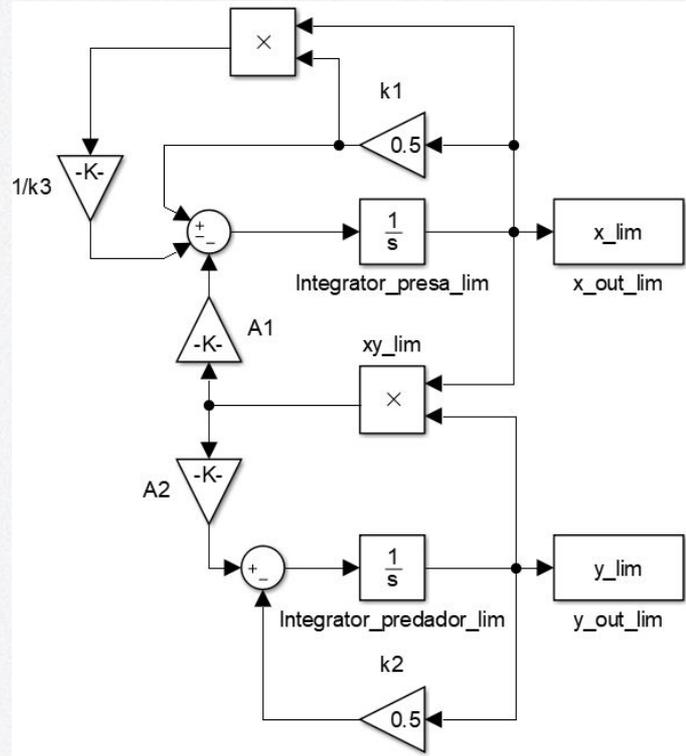
$$c = 0.5, b = 0.02, d = 0.01, K = 120$$

# Resultados

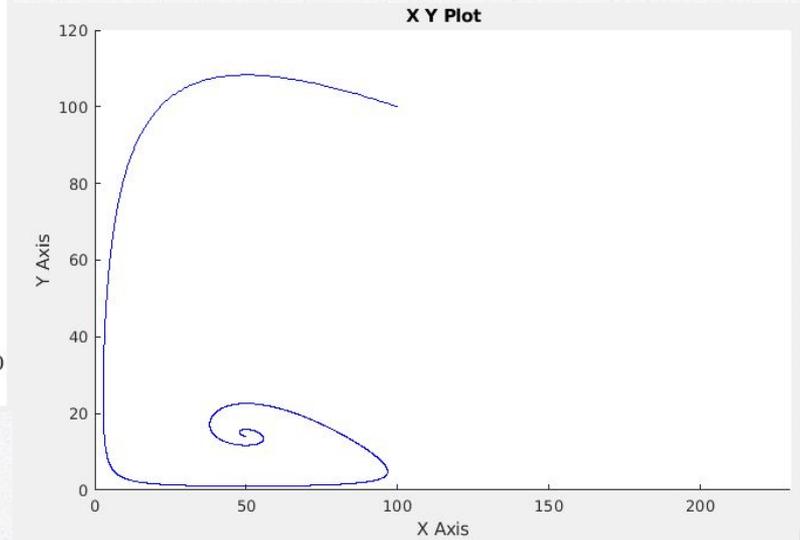
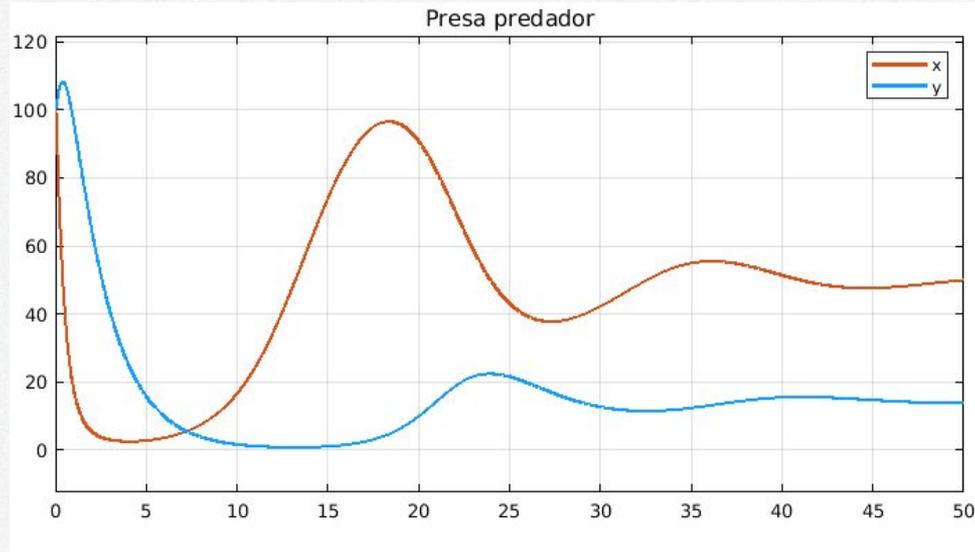
$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \frac{a}{K}x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

$$x_0 = 100, y_0 = 100, a = 0.5, \\ c = 0.5, b = 0.01, d = 0.01 K = 120$$



# Resultados





4

# Tarea

Entregas pasadas y futuras

Quedan pendientes las tareas:

- Modelo Poblacional + Econométrico
- Modelo de Biogeografía
- Modelo de Presa-Predador (clásico y con limitación de herbívoros)

 **Sábado 24/08 - 23:59hs**

 **Sábado 31/08 - 23:59hs**

 **Sábado 7/09 - 23:59hs**

Quedan pendientes las tareas:

- Modelo Poblacional + Econométrico
- Modelo de Biogeografía
- Modelo de Presa-Predador (clásico y con limitación de herbívoros)



**Sábado 24/08 - 23:59hs**



**Sábado 31/08 - 23:59hs**



**Sábado 7/09 - 23:59hs**

Quedan pendientes las tareas:



## Modelo de Presa-Predador

- Plantear los modelos
- Llegar a las ecuaciones, discutir los modelos y sus parámetros.
- Simular su comportamiento mediante simulink.
- Realizar lo propuesto por la letra del cuestionario :
  - Resolver numéricamente en Matlab el modelo LV clásico, graficando la evolución temporal de densidades y su correspondiente ciclo límite.
  - Analizar el modelo LV con limitación de crecimiento.
  - Identificar en la literatura un modelo de comportamiento celular que responda a las ecuaciones de LV.

Datos:

$$\begin{aligned}x_0 &= 100, y_0 = 100, \\a &= 0.5, c = 0.5, \\b &= 0.02, d = 0.01, \\K &= 120\end{aligned}$$



# Bibliografía

1. Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (Vol. 2, p. 508). New York: Springer.
2. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.
3. Samanta, G., & Gomez-Aíza, R. (2014). *Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa*. *Miscelanea Matematica*, 58, 77-110.
4. Chaturvedi, D. K. (2017). *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*. CRC press
5. Herman, R. (2016). Solving Differential Equations Using SIMULINK. *Published by RL Herman, 259-268*.



# ¡Gracias!

¿Preguntas?

Lucía Lemes

✉ [llemes@cup.edu.uy](mailto:llemes@cup.edu.uy)



CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**