Modelos continuos de poblaciones
(para una sola especie)

MODELOS Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS BIOLÓGICOS

Contenidos

1

Poblaciones

Definición, dinámica y modelos

2

Modelo de crecimiento exponencial

3

Modelo de crecimiento logístico

4

Tarea

Cuestionarios

1

Poblaciones

Definición, dinámica y modelado

¿Qué es una población?

Grupo de individuos de la misma especie que ocupan un hábitat específico durante un período de tiempo determinado, y que pueden entrecruzarse

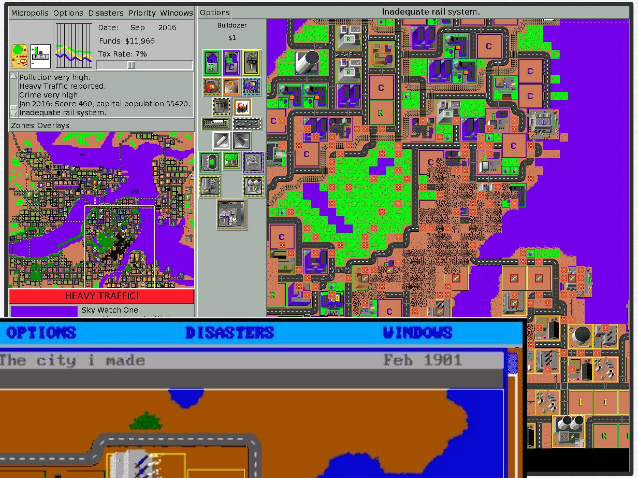
Dinámica de poblaciones

- Se refiere a cómo las poblaciones cambian en el tiempo
- Busca responder preguntas como:
  ¿Qué explica la abundancia promedio de una población?
  ¿Qué causa las fluctuaciones en esa abundancia?
- Implica conocimiento sobre tasas de natalidad y muerte, suministro de alimentos, comportamientos sociales, genética, interacción de las especies con sus entornos e interacción entre ellas.

Los modelos deben reflejar la realidad biológica, pero deben ser lo suficientemente simples como para que se pueda obtener información sobre la población en estudio.

¿Cómo cambia el tamaño y dinámica de una población?

- Tasa de crecimiento de la población per cápita
    - Natalidad
    - Mortalidad
    - Inmigración
    - Emigración



¿Cómo cambia el tamaño y dinámica de una población?

- Tasa de crecimiento de la población per cápita
  - Natalidad:
    - Aumenta el tamaño de la población.
    - Cada especie tendrá su propia tasa máxima de natalidad.
    - Las tasas máximas de natalidad se observan cuando las condiciones son ideales.
    - Esto puede conducir a un **crecimiento exponencial**.
  - Mortalidad:
    - Reduce el crecimiento de la población.
    - Opera más cuando las condiciones no son ideales.
    - Conduce a la competencia, propagación de enfermedades infecciosas.

¿Cómo cambia el tamaño y dinámica de una población?

- Tasa de crecimiento de la población per cápita
    - Inmigración:
        - Aumenta el crecimiento de la población
        - Opera cuando las poblaciones no están completamente aisladas.
    - Emigración:
        - Disminuye el crecimiento de la población
        - Opera cuando las poblaciones no están completamente aisladas.

¿Cómo cambia el tamaño y dinámica de una población?

Tasa de crecimiento = (Natalidad + Inmigración) - (Mortalidad + Emigración)

$$TC = (N + I) - (M + E)$$

Modelado de poblaciones

01

CONTINUOS PARA UNA SOLA ESPECIE

Exponencial

Logístico

Presa-Predador

PARA POBLACIONES EN INTERACCIÓN

02

03

EPIDEMIOLÓGICOS

SIR

SEIR

2

Modelo de crecimiento exponencial

Origen, supuestos y ecuaciones

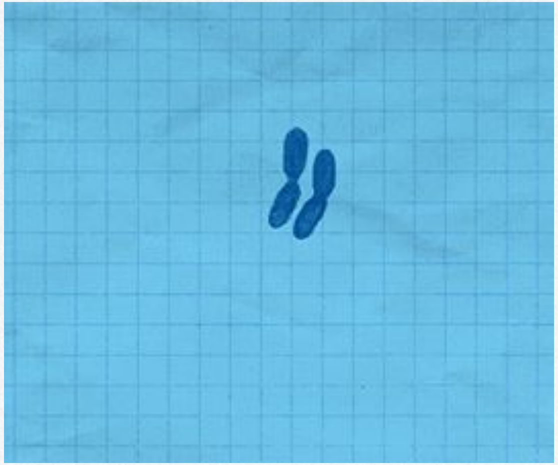
Modelo de crecimiento exponencial

- En 1798, el economista político inglés Thomas Malthus propuso un modelo para las poblaciones humanas.
- Observación: el tiempo requerido para que las poblaciones humanas se dupliquen era esencialmente constante (alrededor de 25 años en ese momento), independientemente del tamaño de la población inicial.

T.R. Malthus

Modelo de crecimiento exponencial

- Todos los individuos se desarrollan independientemente el uno del otro mientras vivan en un entorno sin restricciones donde no sea posible ninguna forma de competencia.



Supuestos

- El tamaño de una población de una sola especie en el momento de tiempo **t** se indicará con **x(t)**

x(t) es diferenciable

- Tasa de cambio del tamaño de la población

~~inmigración~~, ~~emigración~~, mortalidad, natalidad

- Población cerrada: No hay migración hacia ni desde la población

mortalidad, natalidad

$$\boxed{\text{Tasa de crecimiento = Natalidad - Mortalidad}}$$

Supuestos

TASAS DE NATALIDAD Y MORTALIDAD

- Suposiciones explícitas sobre las tasas de natalidad y mortalidad ¿En qué condiciones la competencia entre especies conducirá a la coexistencia?
- Microorganismos tasa de nacimiento de nuevos organismos es proporcional al número de organismos presentes.

Si el tamaño de la población en el tiempo $\mathbf{t}$ es $\mathbf{x}$.
En un intervalo de tiempo $[\mathbf{t}, \mathbf{t+h}]$:

Constante
Tasa de natalidad *per cápita*.

número de nacimientos $\approx \mathbf{bhx}$

número de muertes $\approx \mu\mathbf{hx}$

Constante
Tasa de mortalidad *per cápita*.

Ecuaciones

- El cambio neto en el tamaño de la población en el intervalo de tiempo **[t, t+h]**, es **Δx = x(t + h) - x(t)**, que puede aproximarse por **[bh - µh] x(t)**

$$\boxed{x(t+h) - x(t) \approx [b-\mu]x(t)h}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \approx [b-\mu]x(t)}$$

- Si tomamos el límite cuando **h** tiende a cero, obtenemos la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = (b-\mu)x(t)}$$

Suponiendo que **x(t)** es diferenciable

Ecuaciones

La tasa de crecimiento neto la definimos de manera natural como

$$\boxed{r \equiv (b - \mu)}$$

Debido a que no hay competencia en un entorno sin restricciones, el incremento neto en la población producto de todos los organismos **x(t)** será **rhx(t)** y por lo tanto

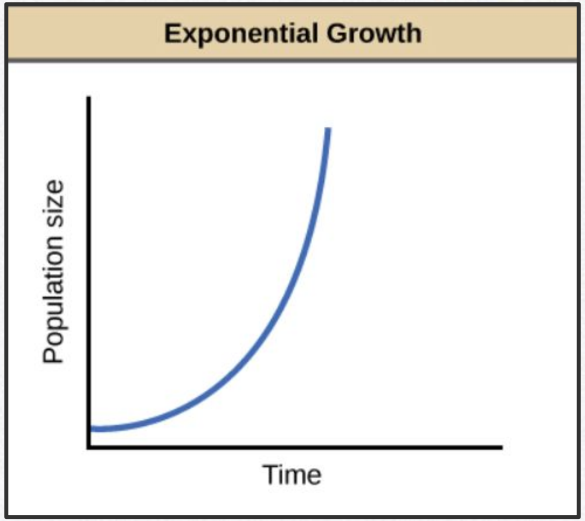
$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)}$$

Análisis

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)}$$

Ecuación diferencial que tiene una familia infinita de soluciones dada por la familia de funciones de un parámetro

$$x(t) = ke^{rt}$$



Extraído de: "Environmental limits to population growth"

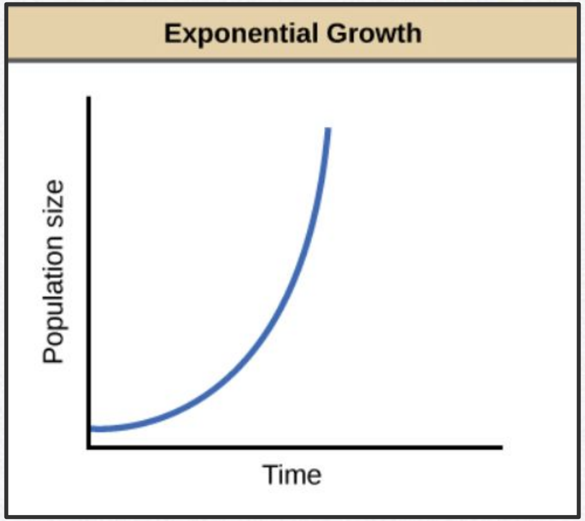
$$r > 0$$

Análisis

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)} \qquad x(0) = x_0$$

Problema de valor inicial

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{rt}}$$



Extraído de: "Environmental limits to population growth"

$$r > 0$$

Análisis

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)} \qquad x(0) = x_0$$

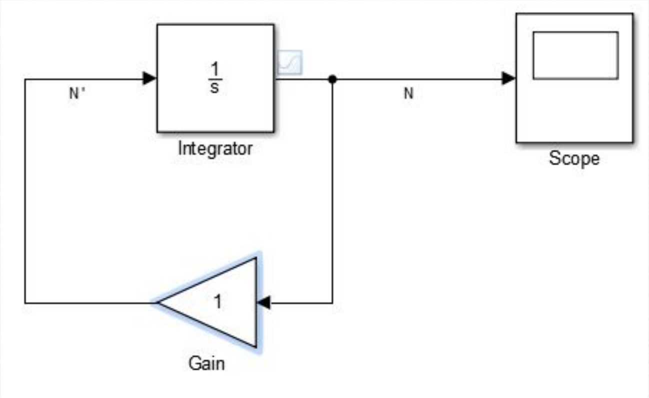
- $r > 0 \;\; (b > \mu)$ ▸ La población crece sin límites cuando el tiempo tiende a infinito
- $r < 0 \;\; (b < \mu)$ ▸ El tamaño de la población se acerca a cero cuando el tiempo tiende a infinito

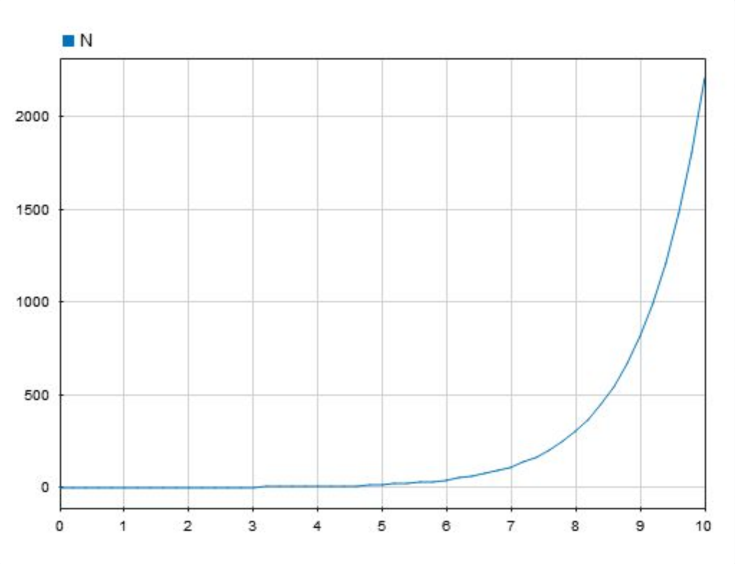
Simulación

Implementar en Simulink la ecuación del modelo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

Resultado





$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

$$r = 1$$

Desventajas del modelo exponencial

La tasa de crecimiento de la población depende solo del tamaño de la misma

Microorganismos

Plantas, animales, seres humanos

(simplificación excesiva)

- Se ignora competencia entre especies por recursos
- Se ignora recursos limitantes
- Se ignora estructura de edad
- Se ignora que las tasas de natalidad o mortalidad puedan verse influenciadas por el tamaño de las poblaciones que interactúan con la población estudiada (competencia, depredación, mutualismo).

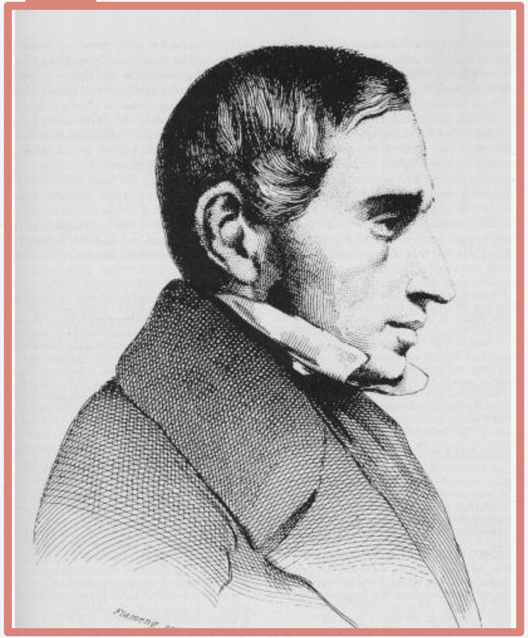
3

Modelo de crecimiento logístico

Origen, supuestos y ecuaciones

Modelo de crecimiento logístico

- El modelo de crecimiento logístico fue publicado por primera vez por Pierre François Verhulst en 1838 después de haber leído el Ensayo sobre el principio de población de Thomas Malthus.
- Verhulst derivó su ecuación logística para describir el crecimiento auto-limitado de una población biológica.



P.F. Verhulst

Supuestos

- Anteriormente tomamos una tasa de crecimiento *per cápita* constante. Ahora, se consideran tasas de crecimiento que disminuyen a medida que aumenta el tamaño de la población.
- El modelo de población más simple en el que la tasa de crecimiento *per cápita* es una función decreciente del tamaño de la población es $\boldsymbol{\lambda - ax}$.
  Esta suposición conduce a la ecuación diferencial logística:

$$\boxed{x'(t) = x(\lambda - ax)}$$

Ecuaciones

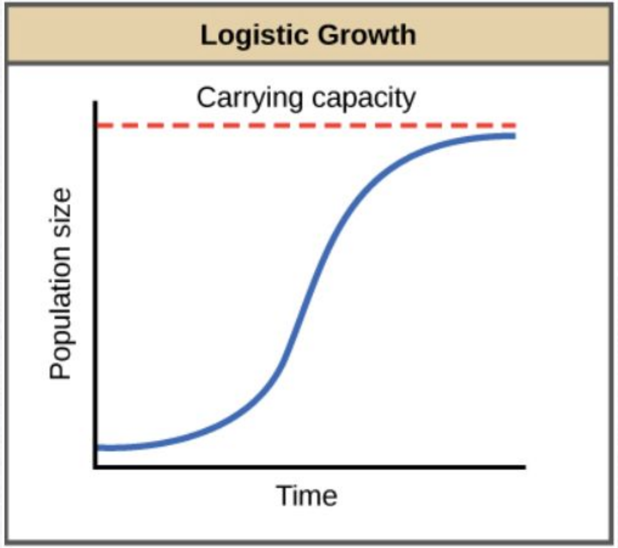
Ecuación logística:

$$\boxed{x'(t) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$$

$$r = \lambda \qquad K = \lambda/a$$

$$r, K > 0$$

x Tamaño de la población
r Tasa de crecimiento intrínseca
K Capacidad de carga



Extraído de: "Environmental limits to population growth”

Análisis

Ecuación logística:

$$\boxed{x(t) = \frac{Kx_0}{x_0+(K-x_0)e^{-rt}}}$$

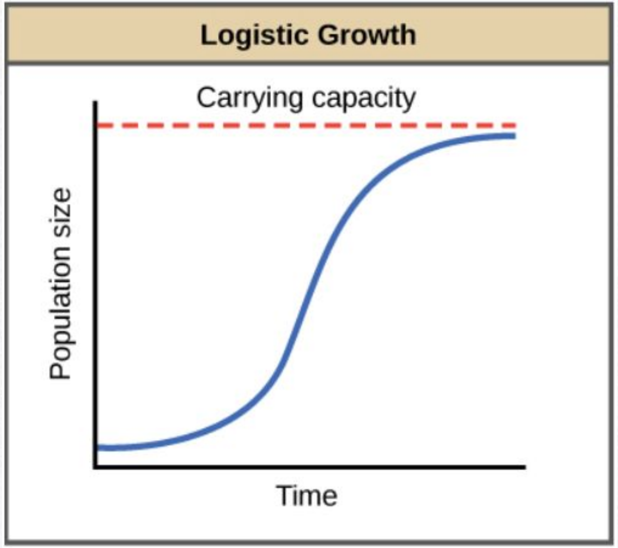
$$r, K > 0 \qquad 0 < x_0 < K$$

x Tamaño de la población

r Tasa de crecimiento intrínseca

K Capacidad de carga

Tamaño de la población que los recursos disponibles pueden soportar



Extraído de: "Environmental limits to population growth”

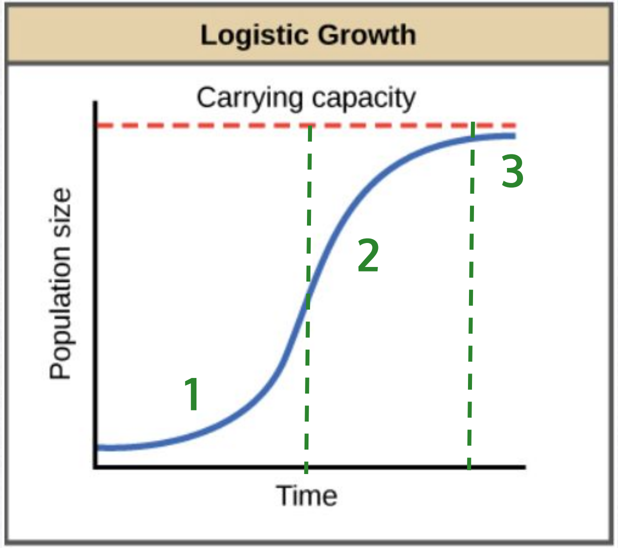
Análisis

FASES

1. <u>Crecimiento exponencial:</u>
   Crecimiento ilimitado.
   Tasa intrínseca de crecimiento.
   Abundante comida, no hay enfermedades, no hay predadores.

1. <u>Fase transicional (crecimiento lineal):</u>
   Factores limitantes que enlentecen el crecimiento.

1. <u>Plateau o fase estacionaria:</u>
   No hay crecimiento.
   Los factores limitantes hacen un balance de la capacidad de la población para aumentar.
   La población alcanza la Capacidad de carga (K) del ambiente.
   Factores limitantes.



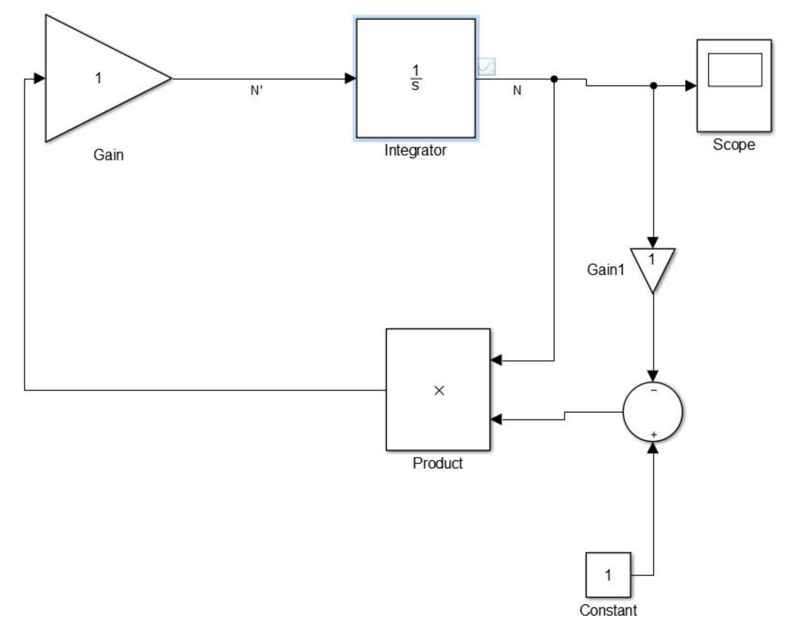
Extraído de: "Environmental limits to population growth"

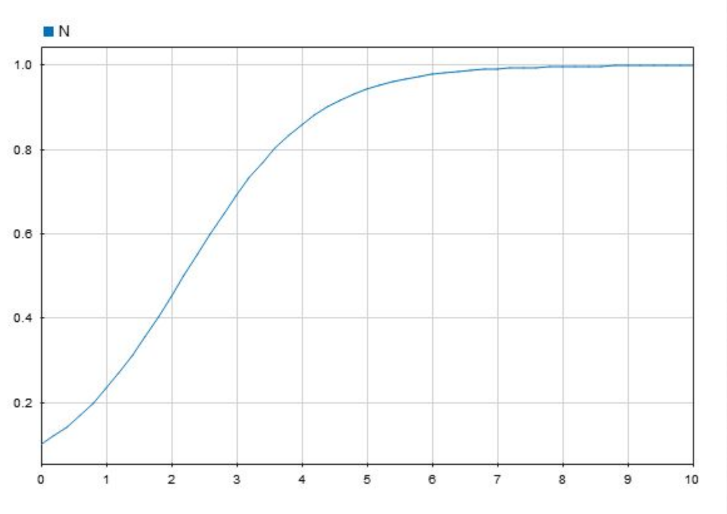
Simulación

Implementar en Simulink la ecuación del modelo:

$$x'(t) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Resultado





$$x'(t) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$r = 1$$

$$K = 1$$

$$x(0) = 0.1$$

4

Tarea

Cuestionarios

Quedan pendientes las tareas:

- Modelos de crecimiento poblacional
- Modelo Econométrico
- Modelo de Biogeografía

Sábado 24/08 - 23:59hs

Sábado 24/08 - 23:59hs

Sábado 31/09 - 23:59hs

Quedan pendientes las tareas:

Modelos de crecimiento poblacional

Realizar el cuestionario planteado en EVA:

- Plantear los modelos Exponencial y Logístico.
- Llegar a las ecuaciones, discutir los modelos y sus parámetros.
- Simular su comportamiento mediante simulink y ecuaciones en diferencias.

Quedan pendientes las tareas:

Modelo Econométrico

Realizar el cuestionario planteado en EVA:

- Investigar el modelo según lo propuesto en la letra del cuestionario.
- Realizar la revisión bibliográfica correspondiente.

Quedan pendientes las tareas:

Modelo de Biogeografía

Realizar el cuestionario planteado en EVA:

- Plantear el modelo según lo propuesto en la letra del artículo.
- Realizar la revisión bibliográfica correspondiente.

Bibliografía

1. Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (Vol. 2, p. 508). New York: Springer.
2. Murray, J. D. (2007). *Mathematical biology: I. An introduction* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
3. Chaturvedi, D. K. (2017). *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*. CRC press
4. Herman, R. (2016). Solving Differential Equations Using SIMULINK. *Published by RL Herman*, 259-268.

¡Gracias!

¿Preguntas?

Lucía Lemes

llemes@cup.edu.uy