Unidad 3

TEOREMAS DE CIRCUITOS

Indice

1. Introducción.

Con los métodos tradicionales de análisis de circuitos (mallas y nudos) y la Transformada de Laplace, podemos resolver completamente cualquier circuito.
Muchas veces, sin embargo, se desea determinar tensión y corriente en un solo elemento o en una parte del circuito.
Interesa entonces sustituir el resto del circuito por otro más sencillo.
Con este propósito, veremos distintos teoremas que además de aplicarse a simplificar el análisis, introducen conceptos básicos fundamentales: impedancias vistas, funciones de transferencia, etc.

2. Principio de Superposición

El principio de superposición puede enunciarse así:
"La respuesta de un sistema lineal a un conjunto de excitaciones aplicadas simultáneamente es igual a la suma de las respuestas cuando cada excitación se aplica aisladamente."
Esto es estrictamente equivalente al carácter lineal de los circuitos.

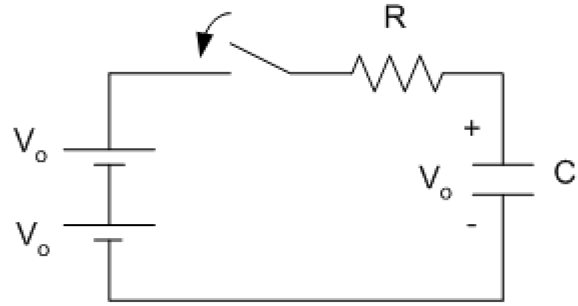
$$\alpha E_1 + \beta E_2 \rightarrow \alpha R_1 + \beta R_2$$

En particular: $E_1 + E_2 \rightarrow R_1 + R_2$

En efecto: si un circuito es lineal, su resolución conduce a un sistema de ecuaciones integro diferenciales lineales, en que las excitaciones, es decir, las fuentes, aparecen en el 2º miembro. (En Laplace, son ecuaciones algebraicas lineales). Se cumple entonces, el principio de superposición.

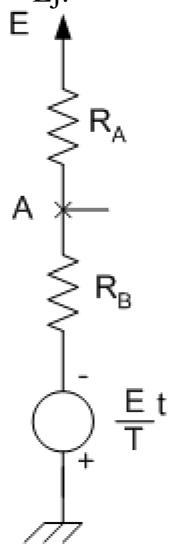
Como siempre, 1) las fuentes que se superponen son solo las independientes,
2) los datos previos también son fuentes.
Habrá que superponer tantos estados como fuentes.

Ej:

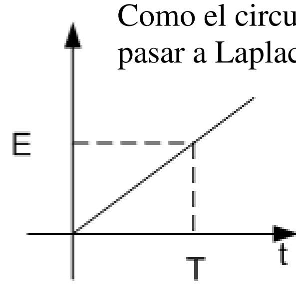


Si aplicáramos superposición a la ligera, considerando una fuente y después otra, en los dos casos tendríamos corriente nula, y al superponer daría 0. El error es que el voltaje previo se debe tomar como fuente (tal como aparece al dibujar el circuito en Laplace).

Ej:



Se observa que la flecha que apunta a "E" es una manera común de representar una fuente de alimentación de valor E cuyo terminal negativo es tierra.
Interesa saber cuándo el voltaje en A es 0.
La manera más práctica es aplicar superposición.
Como el circuito es solo resistivo, no es necesario pasar a Laplace.

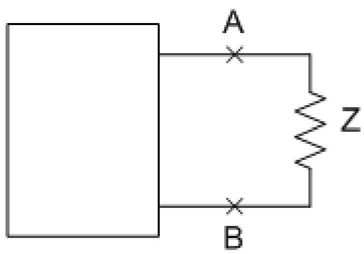


$$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{E}{T} t$$

$$V_A = 0 \Rightarrow t = \frac{R_2}{R_1} T$$

3. Teorema de Thévenin.

Es uno de los más importantes y de mayor aplicación.
Sea un circuito lineal, en el que puede haber de todo, R, L, C, M, fuentes de tensión y corriente, independientes y dependientes.
Distinguimos dos bornes A y B de ese circuito y conectamos una impedancia exterior Z.



Se trata de calcular la corriente que circula por esa impedancia, sin resolver todo el circuito.
Hacemos una hipótesis más: no hay mutua entre Z y el resto del circuito.

Plantearemos dos definiciones previas:

1. **Voltaje de Vacío o de Circuito Abierto**: V_{AB}

Es el voltaje que aparece entre A y B cuando no existe la impedancia Z

Es el que mediría un voltímetro "ideal" (ideal en el sentido de que al conectarse no modifica el voltaje que existía antes entre esos puntos. Ya precisaremos lo que esto significa).

En Laplace, el voltaje de vacío será $V_{AB}(s)$.

2. **Impedancia Vista**: Z_{AB}

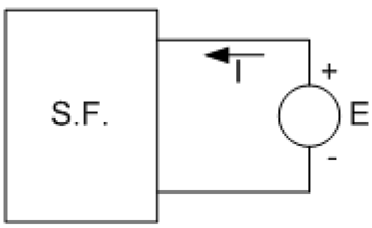
Para definirla, anulemos todas las fuentes. Queda un circuito "pasivo" (mejor dicho: sin fuentes)

¿Qué quiere decir "anular las fuentes"?

Las fuentes de tensión se cortocircuitan; las de corriente se abren.

¿Cuáles? Las independientes y datos previos; no así las dependientes que no son generadores sino vínculos.

Una vez anuladas las fuentes, aplicamos una fuente de tensión E entre A y B.



Circula una corriente I.

El cociente $\frac{E}{I}$, que <u>no</u> depende de E, debido a la linealidad del circuito ya que E es la única fuente, es lo que se llama impedancia vista.

$Z_{AB}(s) = \dfrac{E(s)}{I(s)}$ E(s) es cualquiera; no la especificamos.

En casos sencillos, no hace falta calcular Z_{AB}; alcanza con "mirar" desde A y B, y reconocer una combinación (por ejemplo series y/o paralelos) de impedancias sencillas.

Hay pues, dos métodos para calcular Z_{AB}: la definición o "mirar".

Enunciado del Teorema.

"La corriente que pasa por la impedancia Z conectada entre los bornes A y B es $I = \dfrac{V_{AB}}{Z_{AB} + Z}$"

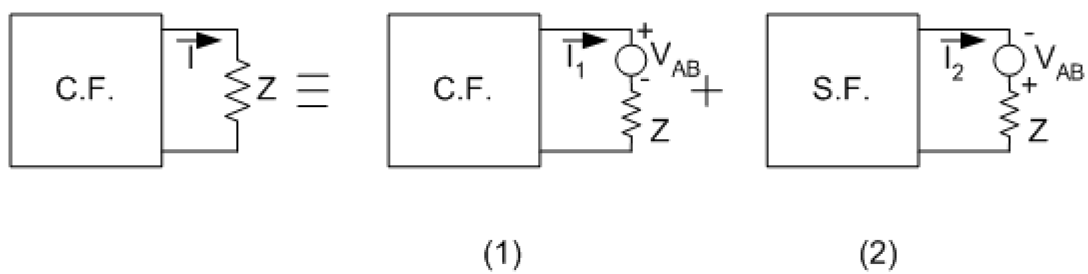
Es decir que independientemente de lo que haya dentro de la "caja negra", si conocemos esos dos parámetros V_{AB} y Z_{AB}, estamos en condiciones de saber qué corriente va a pasar por cualquier Z

En particular, si cortocircuitamos A y B tenemos una corriente que denominamos de cortocircuito:

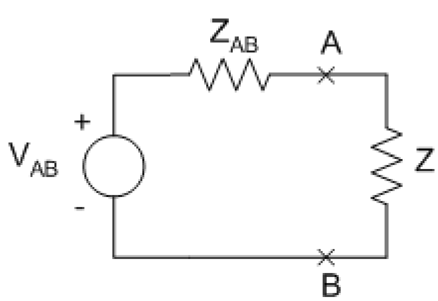
$I_{cc} = \dfrac{V_{AB}}{Z_{AB}}$

Demostración

Se apoya en la linealidad del circuito, que nos permite aplicar superposición. Superpondremos dos estados de modo de obtener el circuito original.

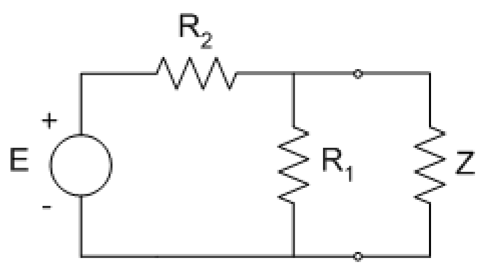


Al superponer, las fuentes se van y queda el circuito original.
La configuración interna de la caja negra es la misma -salvo la anulación de las fuentes en (2)-
Entonces: $I = I_1 + I_2$
En el circuito (1), recordando la definición de V_{AB}, digo que $I_1 = 0$ es solución (desde el punto de vista de la caja negra, está "abierta": pareja compatible $I_1 = 0$ voltaje V_{AB} y desde el punto de vista de la carga también es compatible, porque con $I_1 = 0$, no hay caída en Z – si no hay mutua-)
Aceptando unicidad de la solución $I_1 = 0$
Esto siempre que no haya mutua entre Z y el interior del circuito, pues si la hay, el voltaje entre A y B cambiaría.
En el circuito (2) , recordando la definición de Z_{AB}, es claro que $I_2 = \dfrac{V_{AB}}{Z + Z_{AB}}$
Entonces: a los efectos de lo que pasa en Z, podemos reemplazar la caja negra por su equivalente Thévenin: fuente V_{AB} e impedancia Z_{AB}

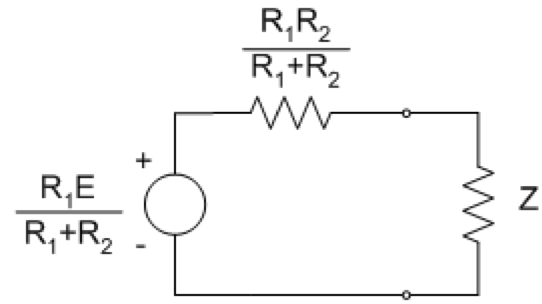


¿Por qué? Pues en este también: $I = \dfrac{V_{AB}}{Z_{AB} + Z}$

Caso del divisor resistivo



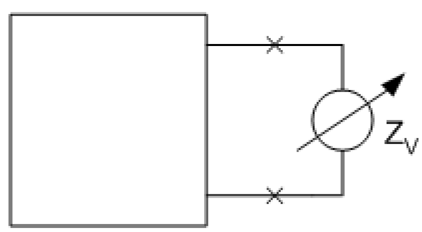
Equivalente Thévenin



Caso del voltímetro.

Aceptando que el voltímetro: mide voltaje

actúa como una impedancia Z_v



Corriente $I = \dfrac{V_{AB}}{Z_v + Z_{AB}}$

Voltaje $V = \dfrac{Z_v V_{AB}}{Z_v + Z_{AB}}$

Para que el voltímetro mida V_{AB}, es decir, para que al conectarlo no se altere el voltaje, debería ser $Z_v = \infty$. En rigor, $Z_v >> Z_{AB}$ Se dice que el voltímetro no "carga" al resto del circuito.

En los testers comunes (analógicos), la Z_v se da en Ω/V, p.ej. 10kΩ/V. Quiere decir que en la escala de 10V, Z_v = 10x10 = 100kΩ . Si lo conectamos en un circuito con una Z vista de 1kΩ, el error cometido por el hecho de medir es del 1%. Si la Z vista fuera de 100k, se debe recurrir a otro tipo de voltímetro (digital, p.ej.) que presente una más alta impedancia propia.

Corriente de cortocircuito.

Ya vimos que si cortocircuitamos A y B: $I_{cc} = \dfrac{V_{AB}}{Z_{AB}}$

Esto en particular sugiere otro método para calcular la impedancia vista.

Hasta ahora vimos dos:

- Poner una fuente exterior, que llamamos E, anular las fuentes internas, y calcular $\dfrac{E}{I}$.
- Simplemente "mirar" desde A y B.
- Si conocemos V_{AB} e I_{cc}, es $Z_{AB} = \dfrac{V_{AB}}{I_{cc}}$

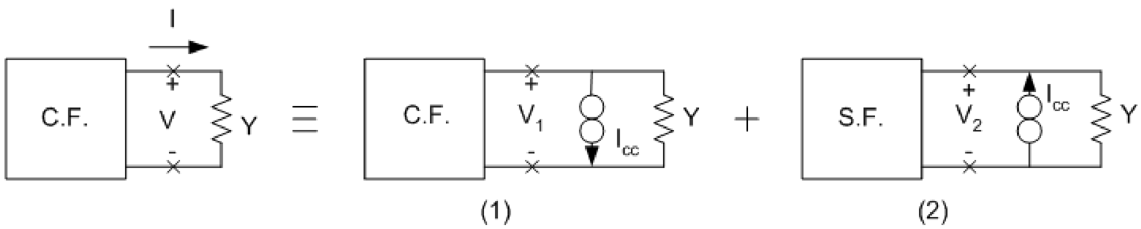
4. Teorema de Norton.

El Teorema de Norton es el dual de Thévenin.
Tenemos una caja negra con fuentes, componentes lineales, etc, en las mismas hipótesis generales de Thévenin, y conectamos entre dos bornes una admitancia Y (es lo mismo que decir Z) sin mutua con el interior.

Trabajamos con la corriente de cortocircuito I_{cc} y la admitancia vista $Y_{AB} = \dfrac{1}{Z_{AB}}$

Norton dice que $V = \dfrac{I_{cc}}{Y_{AB} + Y}$

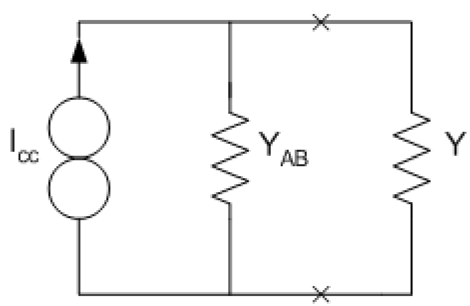
La demostración es análoga a la de Thévenin. Superponemos dos estados.



Digo que $V_1 = 0$ es solución.
En efecto, si $V_1 = 0$, la corriente por Y es cero, y por el sistema circula I_{cc}, como al hacer el cortocircuito.
En el estado 2 , recordando la definición de admitancia vista; el bloque S.F. actúa como Y_{AB}
Luego: $I_{cc} = V_2\,(Y+Y_{AB})$

Como $V = V_1 + V_2 = V_2$ $\qquad V = \dfrac{I_{cc}}{Y + Y_{AB}}$

En otras palabras: el circuito se puede sustituir por su equivalente Norton:

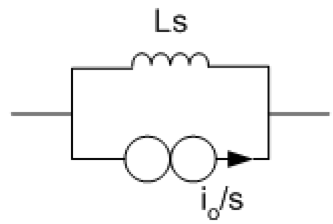


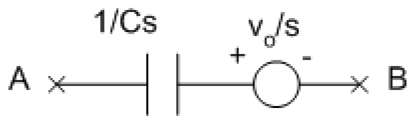
¿Cuál es la relación de éste con el equivalente Thévenin?

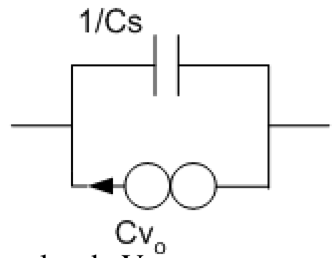
El de Norton tiene la fuente de corriente en paralelo con la admitancia vista.

Ejemplo:
Los circuitos de Laplace con los datos previos.

Es un Thévenin.
El Norton será:







Ver que el sentido de la fuente I_{cc} corresponde a salir por el + de V_{AB}

Fuente cuasi ideal de tensión (Z_{AB}<<Z) y de corriente (Z_{AB}>>Z)

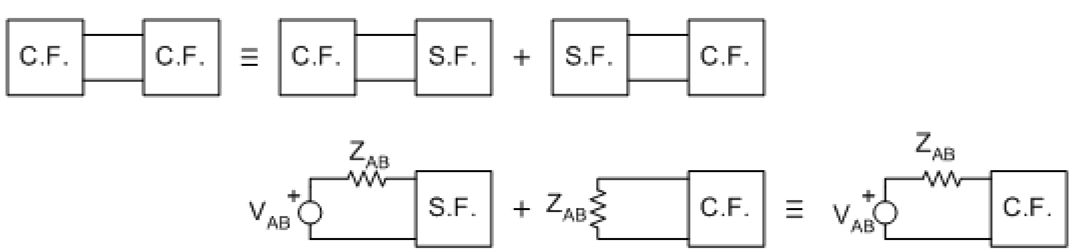
Thévenin: $V = \dfrac{ZV_{AB}}{Z + Z_{AB}}$ Norton: $I = \dfrac{YI_{cc}}{Y + Y_{AB}}$

$V = V_{AB} \Rightarrow Z_{AB} << Z$ $I = I_{cc} \Rightarrow Y_{AB} << Y$

$Z_{AB} >> Z$

5. Generalización de Thévenin.

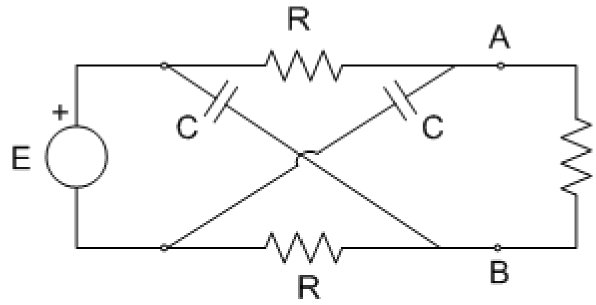
El equivalente Thévenin tiene validez aun cuando lo que se conecte entre A y B no sea una impedancia sino otro circuito activo. En general, si conectamos otro circuito activo (que no tenga acoplamiento magnético con el primero), superponemos así:



6. Ejemplos

Ejemplo 1:

Circuito Lattice (con capacitores inicialmente descargados). Hallar el equivalente Thévenin.



1º) $V_{AB} = V_A - V_B$

$$V_A = E - \frac{RE}{R + \frac{1}{Cs}} \quad \text{o mejor:} \quad V_A = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} E \qquad\qquad V_B = \frac{RE}{R + \frac{1}{Cs}}$$

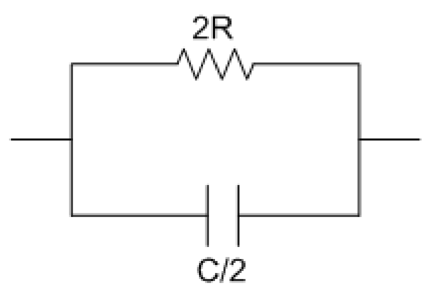
$$V_{AB} = E\left[1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{Cs}}\right] = E\left[1 - \frac{2RCs}{RCs + 1}\right] = \frac{(1 - RCs)}{1 + RCs} E$$

2º) Z_{AB} es la serie de dos paralelos iguales: $Z_{AB} = 2\frac{R.\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{2R}{RCs + 1}$

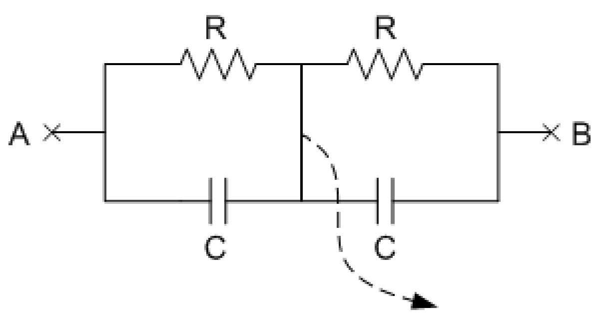
¿Cómo se puede dibujar Z_{AB}?

a) Es un "paralelo" de una R´ con una C´:

$$\frac{R'\frac{1}{C's}}{R' + \frac{1}{C's}} = \frac{R'}{R'C's + 1} \Rightarrow \qquad R' = 2R \quad C' = \frac{C}{2}$$

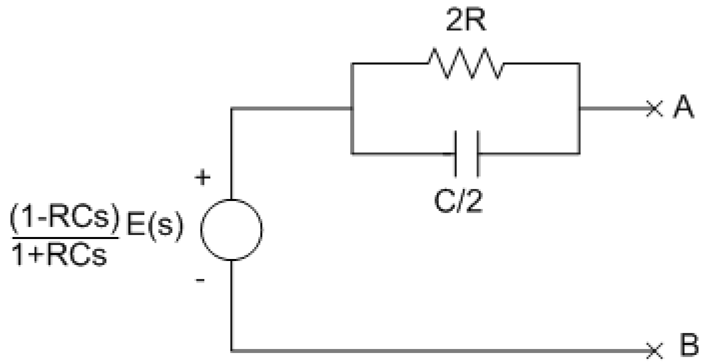


b)



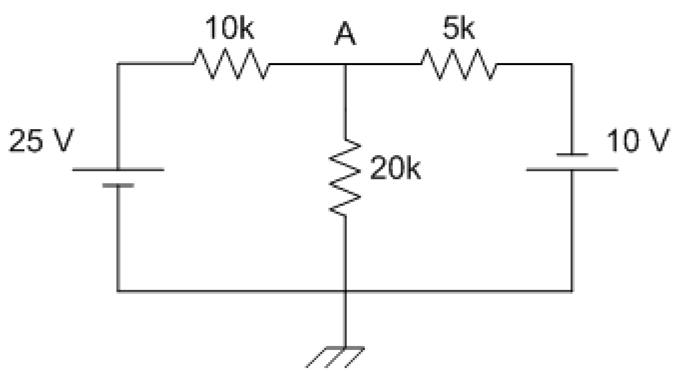
el voltaje es cero; se puede abrir.

Entonces, el equivalente Thévenin será:



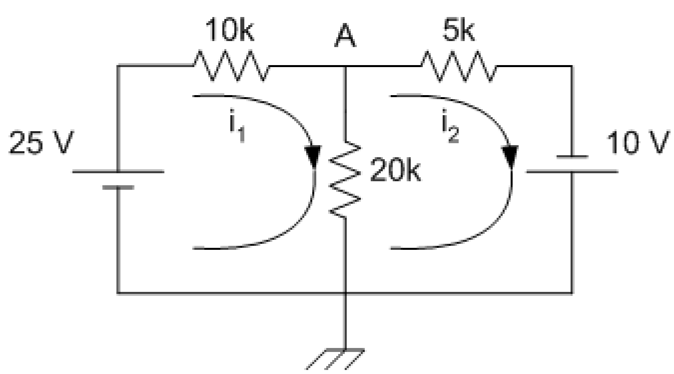
Ejemplo2:

El teorema de Thévenin y sus consecuencias muchas veces se aplican para simplificar cálculos, aun sin variar (ni considerar) la Z_L
Para comparar, sobre un ejemplo sencillo, el trabajo que dan los distintos métodos, veamos mallas, nudos y Thévenin.



Queremos calcular el voltaje en A.

a) Mallas



$25 = 10i_1+20(i_1-i_2)$	$25 = 30i_1-20i_2$	(2) $5 = 6i_1-4i_2$
$10 = 20(i_2-i_1)+5i_2$	$10 = -20i_1+25i_2$	(3) $2 = -4i_1+5i_2$

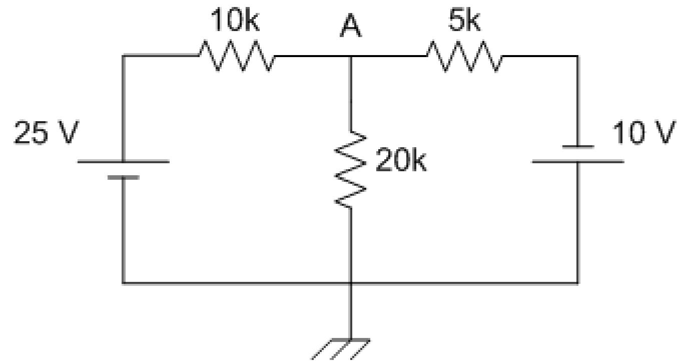
$$16 = 7i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{16}{7}$$

Necesitamos i_1; en la 2ª p.ej: $4i_1 = 5i_2 - 2 = \frac{80}{7} - 2 = \frac{80-14}{7} = \frac{66}{7} \Rightarrow i_1 = \frac{33}{14}$

$V_A = 20(i_1 - i_2) = 20\left(\frac{33}{14} - \frac{16}{7}\right) = 20\left(\frac{33-32}{14}\right) = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$

b) Nudos

$$\frac{25-V}{10} = \frac{V}{20} + \frac{V+10}{5}$$
$$50 - 2V = V + 4V + 40$$
$$10 = 7V \Rightarrow V = \frac{10}{7}$$



c) Superposición

$$V_A = \frac{25x4}{14} - \frac{10.\frac{20}{3}}{\frac{20}{3}+5} = \frac{25x2}{7} - \frac{200}{35} = \frac{50}{7} - \frac{40}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{20x5}{20+5} = \frac{100}{25} = 4 \qquad \frac{20x10}{20+10} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3}$$

d) Thévenin

Aplicamos: $V_{AB} = Z_{AB} I_{cc}$, sin considerar Z externa

¿Por qué? Porque Z_{AB} e I_{cc} son sencillas de calcular

d1) Calculamos I_{cc} Por superposición: $I_{cc} = \frac{25}{10} - \frac{10}{5} = 2.5 - 2 = 0.5\,\text{mA}$

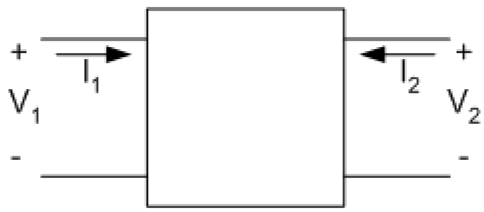
d2) Z_{AB} es el paralelo de 10k, 20k y 5k

$$Y_{AB} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{2+4+1}{20} = \frac{2}{20} \Rightarrow Z_{AB} = \frac{20}{7}\text{k}\Omega$$

Luego: $V_A = \frac{20}{7} x0.5 = \frac{10}{7}\,\text{V}$

Ejemplo 3:
Impedancias de entrada y salida

Recordemos el enfoque de la caja negra con dos pares de terminales.

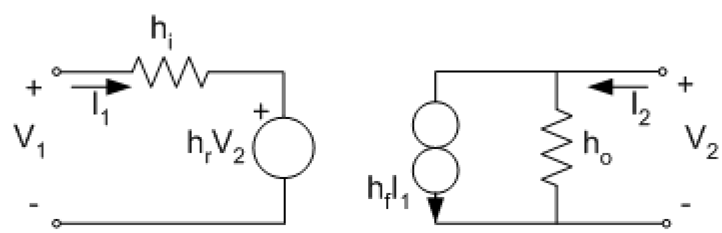


Es lo que se llama un cuadripolo (lo veremos mejor más adelante).
Definimos convencionalmente "entrada" y "salida".
(Por lo común, en el dibujo, de izquierda a derecha)
Quedan definidos V_1, V_2, I_1, I_2.

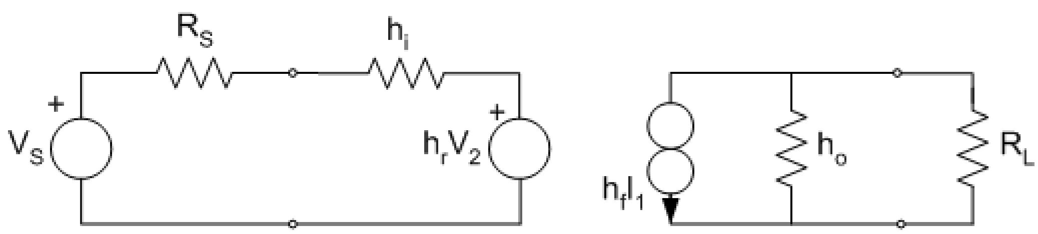
La idea es que el cuadripolo interesa en la forma que modifica las señales trasmitidas de un lado al otro y no en los detalles de su estructura interna.
Suponiendo que dentro no hay fuentes (ni datos previos), y en la hipótesis de linealidad, las relaciones entre los cuatro parámetros serán lineales.
Se suelen dar expresando dos parámetros en función de los otros dos.
Eso da lugar a distintos "parámetros" en la descripción del cuadripolo.
P.ej. expresando V_1, I_2 en función de I_1, V_2, se tienen los parámetros h:

$$V_1 = h_i I_1 + h_r V_2$$
$$I_2 = h_f I_1 + h_o V_2$$

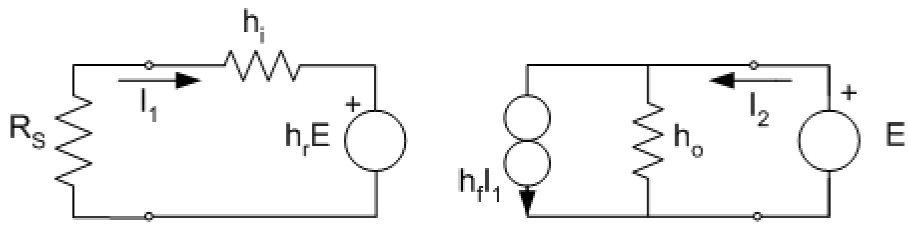
¿Cómo lo dibujamos?



Es el mejor modelo para describir al transistor en pequeña señal.
Externamente se le conecta un generador a la entrada y una carga a la salida

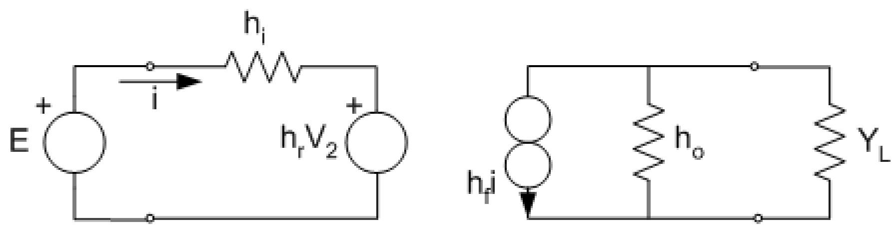


Calculemos la impedancia de salida
Anulamos la fuente (V_s) Ponemos fuente E a la salida.



$$I = h_o E + h_f\left(-\frac{h_r E}{h_i + R_s}\right) \Rightarrow Y_o = h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + R_s}$$

Calculemos la impedancia de entrada



$$E = h_i i + h_r\left(-\frac{h_f i}{h_o + Y_L}\right) \Rightarrow Z_i = h_i - \frac{h_r h_f}{h_o + Y_L}$$

En un transistor estándar (emisor común), se tienen ordenes de valores:

$$\begin{cases} h_f = 100 \\ h_i = 1k\Omega \\ h_r \cong 10^{-4} \\ h_o = 25\mu A/V \\ \dfrac{1}{h_o} = 40k \end{cases}$$

7. Recapitulando

Los teoremas vistos introducen conceptos fundamentales en el manejo e interpretación de los circuitos y al mismo tiempo suministran técnicas prácticas de análisis de los mismos.
En particular, el principio de superposición, más allá de su importancia conceptual, constituye un método práctico que muchas veces compite con ventajas sobre los métodos clásicos de mallas y nudos.
La noción de ‘ìmpedancia vista” se proyecta en su aplicación a todas las áreas de la ingeniería eléctrica.
Los teoremas de Thévenin y Norton permiten caracterizar cualquier circuito lineal desde dos bornes, por un equivalente de estructura sumamente sencilla