Teoría de Circuitos 2022

Circuitos en Laplace

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

CENUR Litoral Norte

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

INGENIERÍA BIOLÓGICA

Resumen - Transformada de Laplace

Definición

- Dada una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define la **transformada unilateral de Laplace** como:

$$\boxed{F: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt}$$

- Condición de existencia de la transformada de Laplace: **re(s)>α** (abscisa de convergencia)

$$D(F(s)) = \{s \in \mathbb{C} / re(s) > \alpha\}$$ (semiplano de convergencia)

- Consideraciones acerca de f(t):
  - Si no se aclara lo contrario f(t)=0 para t<0
  - f(t)=f(t).Y(t) donde Y(t) es el escalón de Heavyside.

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$

Resumen - Transformada de Laplace

Algunas propiedades

- Linealidad

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)](s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

- Traslación temporal

$$\mathcal{L}[Y(t-T)f(t-T)](s) = F(s)e^{-Ts}$$

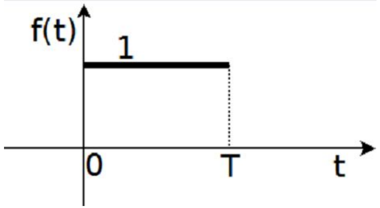
- Traslación en frecuencia

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}](s) = F(s+a)$$

Resumen - Transformada de Laplace

Transformada de algunas funciones

- Pulso rectangular

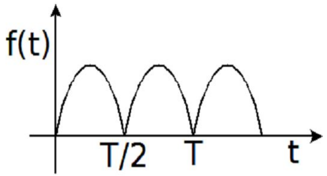


$$f(t) = Y(t) - Y(t-T) \qquad \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

- Función periódica de periodo T ($f(t+T)=f(t) \ \forall t$)

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \quad f_1(t) = \begin{cases} f(t) \ si \ t \in (0,T) \\ 0 \qquad si \ no \end{cases}$$

- Seno rectificado



$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \frac{\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$$

Resumen - Transformada de Laplace

Derivada temporal

- Sea $f(t)$ derivable y transformable y sea $f(0^+)$ su condición inicial.

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0^+)}$$

Integración temporal

- Sea $f(t)$ transformable y sea $g(t)$ tal que: $g(t) = \int_0^t f(x)dx$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) = \frac{F(s)}{s}}$$

Derivada en frecuencia

- Sea $f(t)$ transformable y sea $F(s)$ su transformada.

$$\boxed{\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[-t.f(t)]}$$

Resumen - Transformada de Laplace

Teorema del valor inicial

- Enunciado: Sea $f(t)$ transformable y $f(0^+)$ su valor inicial, entonces se cumple que:

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)}$$

Teorema del valor final

- Enunciado: Sea $f(t)$ transformable y $f(0^+)$ su valor inicial, entonces se cumple que:

$$\boxed{\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)}$$

- Además del caso anterior, se le agrega la restricción de que la abscisa de convergencia sea menor a 0 (existencia de *F(s)* en *s=0*).

Resumen - Transformada de Laplace

Transformadas de ecuaciones diferenciales ordinarias

- Sean *x(t)* n veces diferenciable y *u(n)*, ambas transformables y sea la siguiente ecuación diferencial:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{n-1}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

- Considerando condiciones iniciales nulas y aplicando transformada de Laplace en ambos lados se tiene que:

$$s^n X(s) + a_{n-1}s^{n-1}X(s) + \cdots + a_1 sX(s) + a_0 X(s) \overset{a_n=1}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) X(s) = U(s)$$

- Observación: Al igual que en el caso de fasores, una ecuación diferencial se transforma en una expresión algebraica en el dominio de Laplace!!! Para hallar *x(t)* hay que antitransformar..

Resumen - Transformada de Laplace

Metodología

- Dado un circuito con entrada sinusoidal $v_i(t)$:

Dominio temporal

$$v_i(t) = f(v_0(t)) \longrightarrow v_o(t)$$

1’ - Resolver ec. diferencial ordinaria

1 - Transformar

$\mathcal{L}[*]$

3 - Pasar a dominio temporal

$\mathcal{L}^{-1}[*]$

Circuito en fasores

$$V_i(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \, V_o(s) \longrightarrow V_o(s)$$

2 - Resolver expresión algebraica

Resumen - Transformada de Laplace

Antitransformada de Laplace

- Estrategia:
  - Aplicar fracciones simples hasta llegar a expresiones conocidas, ej:

$$\frac{1}{s+a}, \qquad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad e^{-sT}.$$

  - Luego ir a la tabla y antitransformar

Resumen - Transformada de Laplace

Pares de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$	Semiplano de convergencia
impulso unitario $\delta(t)$	1	$\forall s \in \mathbb{C}$
escalon unitario $Y(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
t^n , $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t^n e^{-at}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \text{máx}\{-a, -b\}$
$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \text{máx}\{-a, -b, 0\}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \text{máx}\{-a, 0\}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\zeta\omega_n$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \text{máx}\{-\zeta\omega_n, 0\}$

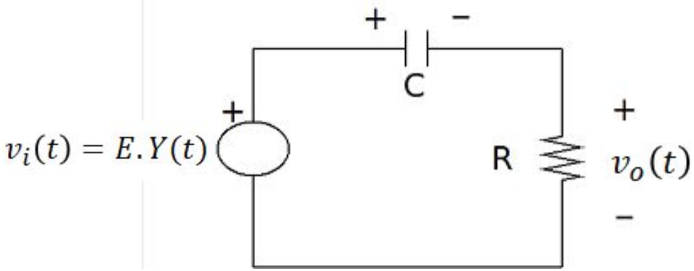
Propiedades de la transformada de Laplace

$\mathcal{L}[Af(t)]$	$=$	$AF(s)$
$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)]$	$=$	$F_1(s) + F_2(s)$
$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$	$=$	$sF(s) - f(0)$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]$	$=$	$\frac{F(s)}{s}$
$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]$	$=$	$F(s+a)$
$\mathcal{L}[Y(t-a)f(t-a)]$	$=$	$e^{-as}F(s)$
$\mathcal{L}[tf(t)]$	$=$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$	$=$	$aF(as)$
Teorema del valor inicial: $f(0^+)$	$=$	$\lim_{s\to+\infty} sF(s)$
Teorema del valor final: $f(t \to +\infty)$	$=$	$\lim_{s\to 0^+} sF(s)$
Transformada de una función periódica de período T : $\mathcal{L}[f(t)]$	$=$	$\frac{\mathcal{L}[f_T(t)]}{1-e^{-Ts}}$, *siendo f_T la restricción a un período de $f(t)$*
Teorema de convolución: $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$	$=$	$F_1(s)F_2(s)$

Funciones generalizadas

Impulso de Dirac

- Consideremos el siguiente circuito:



- Su ecuación diferencial es:

$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i(t)$$

- El objetivo es encontrar una expresión para la corriente que circula por la malla para todo t y R.

¿Qué ocurre en un entorno de t=0?

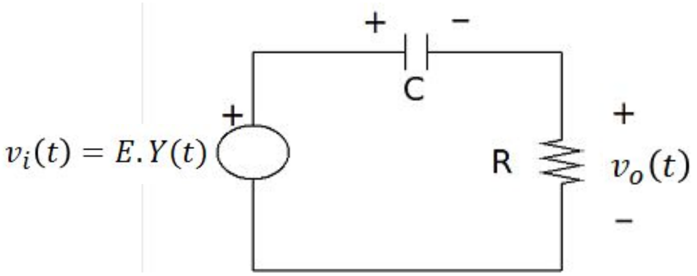
Funciones generalizadas

Impulso de Dirac

- La señal v_i no es derivable en 0, por lo tanto no es posible obtener una expresión de $v_0(t)$ para todo t con la teoría que conocemos hasta ahora.
- Analicemos que ocurre cerca de t=0
- En el estado previo ($t=0^-$):
    - Régimen de continua con $v_i=0$

$$v_o(0^-) = 0$$

    - Se denomina **dato previo** al valor de cierta señal antes de que ocurra un cambio en el circuito.



$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i(t)$$

Ojo, no confundir con la condición inicial (ej. $v_c(0^+)$)

Funciones generalizadas

Impulso de Dirac

- Por lo general la condición inicial de un sistema no se conoce, pero sí el dato previo.
- La transformada de Laplace de la salida es:

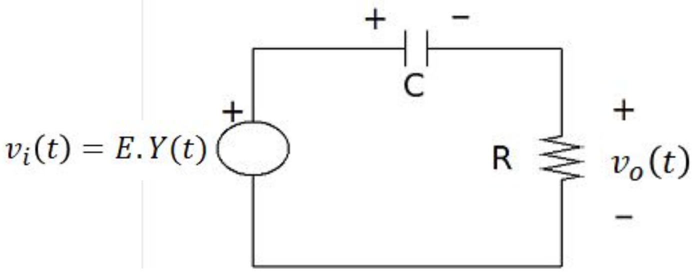
$$V_o(s) = \frac{sV_i(s) - v_i(0^+) + v_o(0^+)}{s + \frac{1}{RC}}$$

- En este caso, como la carga del capacitor se conserva:

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0 \rightarrow v_0(0^+) = v_i(0^+) = E$$

- Entonces:

$$V_o(s) = \frac{E}{s + \frac{1}{RC}} \rightarrow v_o(t) = Y(t)Ee^{-t/RC}$$



$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i(t)$$

Veamos que ocurre en el capacitor

Funciones generalizadas

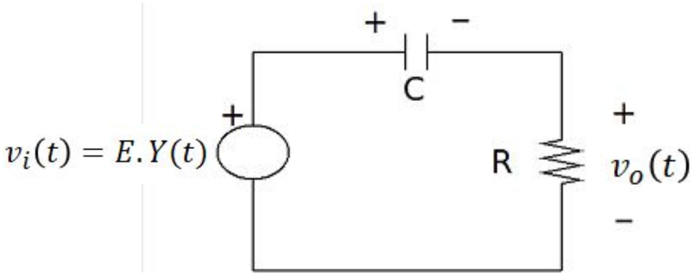
Impulso de Dirac

- Las ecuaciones en el capacitor son:

$$v_C(t) = Y(t)E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) = Y(t)\frac{E}{R}e^{-t/RC}$$

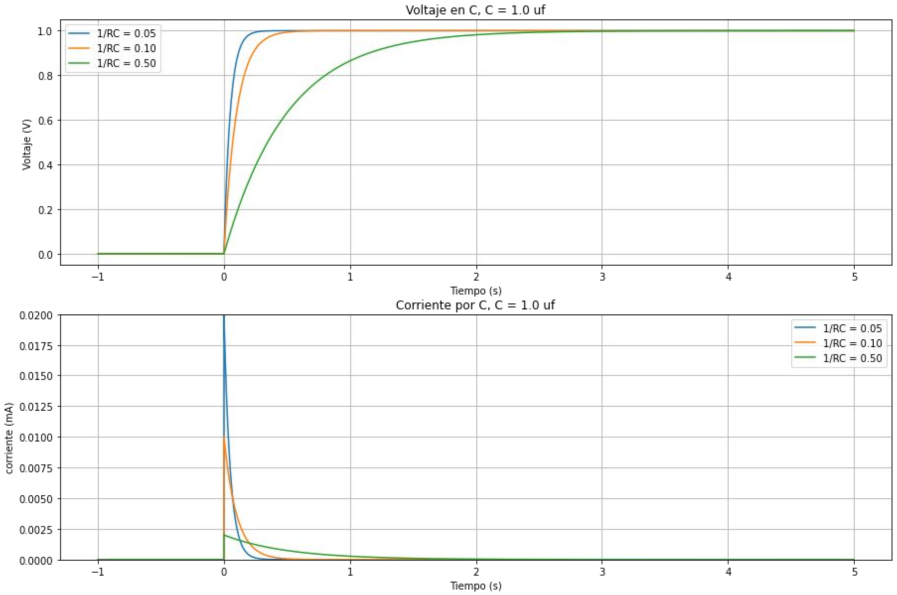
- ¿Cómo se ven gráficamente estas expresiones en función de R?



$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i(t)$$

Funciones generalizadas

Impulso de Dirac



Funciones generalizadas

Impulso de Dirac

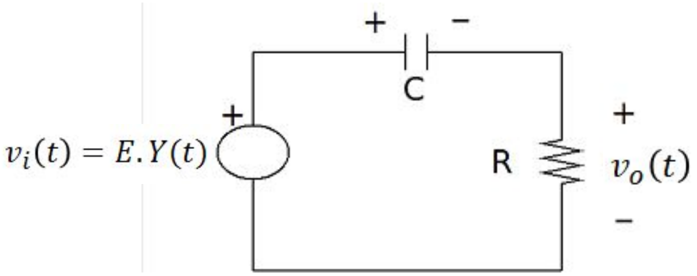
- Observar que el área bajo la curva de la corriente es constante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)dt = EC$$

- Por lo tanto, para R→ 0, el caso límite para el voltaje y corriente es:

$$v_C(t) = \lim_{R\to 0} Y(t)E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Y(t)E$$

$$i(t) = \lim_{R\to 0} EC\frac{d}{dt}Y(t)e^{-t/RC} = EC\frac{d}{dt}Y(t) = EC\,\boldsymbol{\delta(t)}$$



$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i(t)$$

Delta de Dirac

Funciones generalizadas

Impulso de Dirac

- El delta de Dirac representa una extensión al espacio de funciones (función singular)
- Esta función da la completitud de la derivada del escalón en todo el dominio temporal.
- El impulso vale 0 en todo el dominio excepto en t=0 donde su valor “infinito” es tal que:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

A partir de esto podemos extender el conjunto de funciones transformables

Funciones generalizadas

Funciones regulares

- Una función $f:[0,\infty) \to \mathbb{C}$ es seccionalmente continua, si existe un conjunto finito K tal que:
  - f es continua en $[0,\infty)\setminus K$
  - Existen los límites laterales para cada $x \in K$

- f es regular si:
  - f es seccionalmente suave (seccionalmente continua y C^∞ en $[0,\infty)\setminus K$)
  - para cada $x \in K$ existen los datos previos para la derivada de todos los órdenes $(f^{(n)}(x^-))$

Funciones generalizadas

Funciones singulares - Ejemplos

- Delta de Dirac $\delta(t)$
- Impulso con asiento en T $\delta_T(t) = \delta(t-T)$
- Peine de Dirac $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$
- Producto del impulso por una función:
  - sea f(t) regular, entonces se cumple: $f(t)\delta_{t_0}(t) = f(t_0)\delta_{t_0}(t)$
- Derivada de una función singular: $\left(f(t)\delta(t)\right)' = f(0)\delta'(t) + f'(0)\delta(t)$

Funciones generalizadas

Funciones singulares

- Una función singular f_s es una combinación lineal de impulsos y sus derivadas:

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} \delta_{t_k}^{(n_k)}(t)$$

- Los t_k son los tiempos donde ocurren las singularidades.
- los c_{nk} son las amplitudes de las discontinuidades de las derivadas n-ésimas (saltos).

Funciones generalizadas

Definición

- Una función generalizada se compone de una parte regular y una parte singular:

$$f(t) = f_r(t) + f_s(t)$$

- La parte regular es la que tiene la información del dato previo
- La derivada de la parte regular de *f* se extiende de la siguiente forma:

$$f_r'(t) = \left(f_r'(t)\right)_r + \sum_{t_k \in K} [f_r(t_k^+) - f(t_k^-)]\delta(t - t_k)$$

- Donde K es el conjunto de discontinuidades (finitas) de f_r.

Funciones generalizadas

Transformada de Laplace

- La definición de transformada de Laplace se puede extender al dato previo 0^-.

$$\mathcal{L}_-[f(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- En el caso de la parte singular, la transformada de cada término se calcula como:

$$\mathcal{L}_-\left[\delta^{(n)}(t-t_o)\right](s) \overset{def\,F'(s)}{=} s^n\mathcal{L}_-[\delta(t-t_0)](s) = s^n\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt = s^n e^{-st_0}$$

- Notar que ahora se pueden antitransformar funciones reales racionales no estrictamente propias.

Funciones generalizadas

Extensión del teorema de la derivación

- La definición de derivación en Laplace se extiende como:

$$\mathcal{L}_{-}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0^{-})$$

- Notar que ahora depende del valor previo del circuito.

Componentes en Laplace

Impedancia

- La definición de impedancia en Laplace es similar al caso de Fasores
- La única diferencia es que hay que tener en cuenta las condiciones iniciales (respuesta natural del sistema)

Componentes en Laplace

Resistencia

- La ley de Ohm nos dice que:

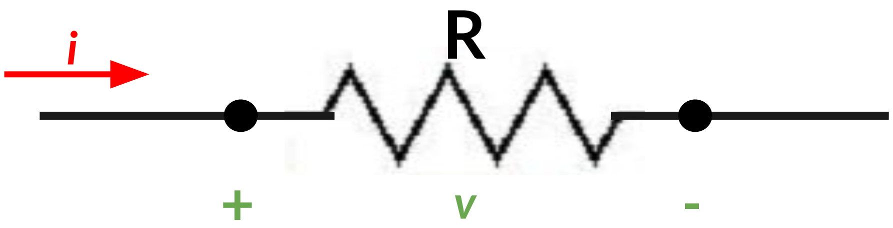
$$v(t) = Ri(t)$$

- Pasando a Laplace

$$V(s) = \mathcal{L}\_[v(t)](s) = \mathcal{L}\_[Ri(t)](s) = RI(s)$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{V(s) = RI(s)}$$



La ley de ohm es invariante en Laplace

Componentes en Laplace

Capacitancia

- La ley de del elemento nos dice que:

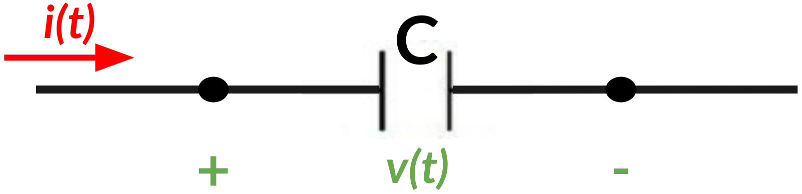
$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

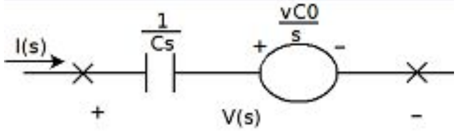
- Pasando a Laplace:

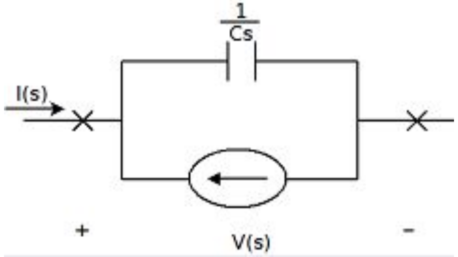
$$I(s) = \mathcal{L}_{-}[i(t)](s) = \mathcal{L}_{-}\left[C\frac{dv}{dt}\right](s) = CsV(s) - Cv(0^{-})$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{I(s) = CsV(s) - Cv(0^{-}), \qquad V(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v(0^{-})}{s}}$$







Esto responde a dos modelos.

Componentes en Laplace

Inductancia

- La ley de del elemento nos dice que:

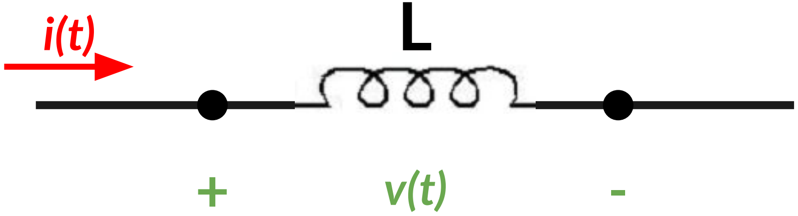
$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

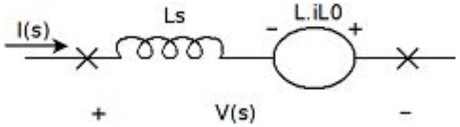
- De forma simétrica al caso anterior:

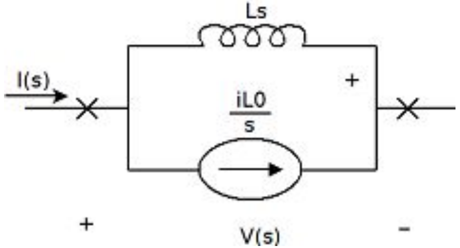
$$V(s) = \mathcal{L}_{-}[v(t)](s) = \mathcal{L}_{-}\left[L\frac{di}{dt}\right](s) = LsI(s) - Ci(0^{-})$$

- A partir de la identidad se concluye que:

$$\boxed{V(s) = LsI(s) - Li(0^{-}), \qquad I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0^{-})}{s}}$$





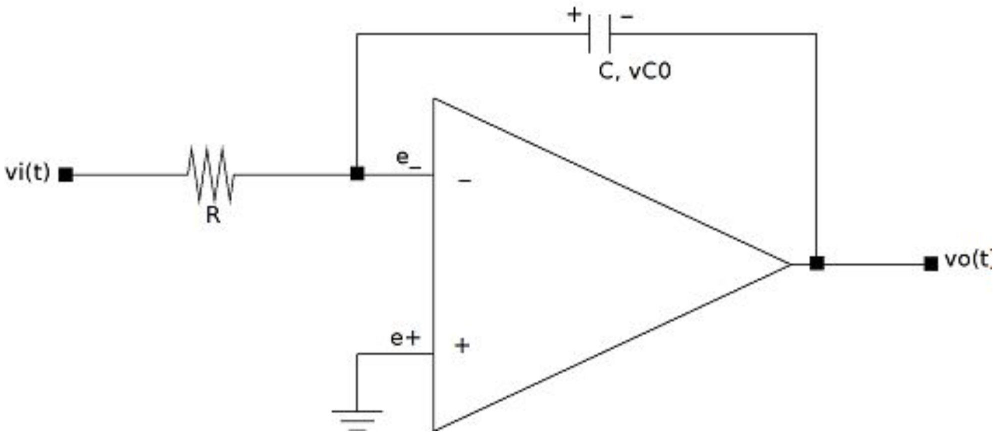


Esto también responde a dos modelos.

Componentes en Laplace

Ejemplo

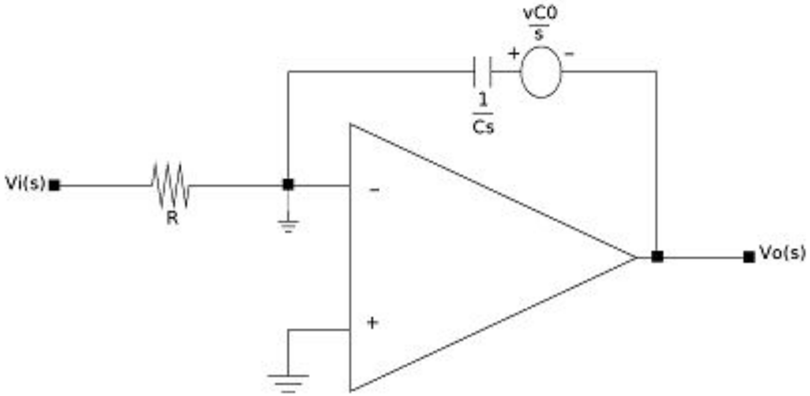
- Resolver el siguiente circuito con dato previo:



Componentes en Laplace

Ejemplo

- El circuito equivalente en Laplace queda:

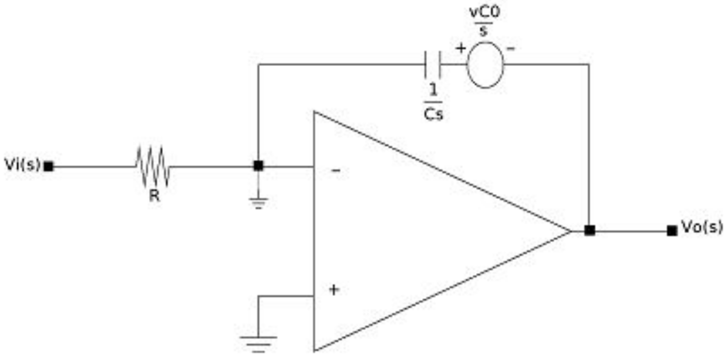


Componentes en Laplace

Ejemplo

- Aplicando nudos en e⁻:

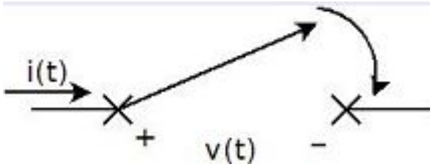
$$\frac{V_i(s)}{R} = \frac{-\left(\frac{v_{C_0}}{s} + V_o(s)\right)}{1/Cs} \rightarrow V_o(s) = -\underbrace{\frac{v_{C_0}}{s}}_{R.propia} - \underbrace{\frac{V_i(s)}{RCs}}_{R.forzada}$$



Linealidad a tramos

Elementos lineales a tramos

- Llave

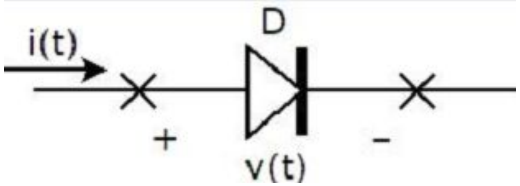


ON cortocircuito - OFF circuito abierto

Linealidad a tramos

Elementos lineales a tramos

- Diodo

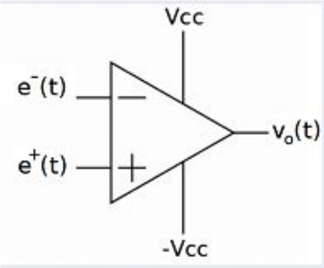


Estado	Suposición	Verificación
ON	$v_D = 0$	$i_D \geq 0$
OFF	$i_D = 0$	$v_D \leq 0$

Linealidad a tramos

Elementos lineales a tramos

- Comparador ideal



Suposición	Verificación
$v_o = +V_{CC}$	$e^+ > e^-$
$v_o = -V_{CC}$	$e^+ < e^-$

Linealidad a tramos

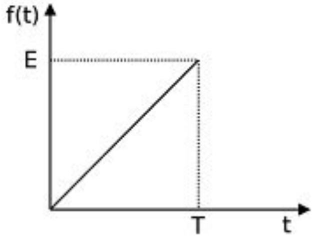
Circuitos lineales a tramos - Estrategia:

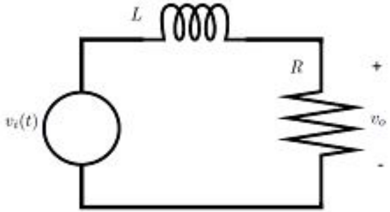
1. Definir los tramos donde el estado de los circuitos lineales a tramos se mantiene
2. Para cada tramo:
   a. Determinar t=0 como el comienzo del tramo
   b. Identificar los datos previos
   c. Resolver el circuito
   d. Identificar el final del tramo (estado previo del siguiente tramo)

Linealidad a tramos

Ejercicio -Respuesta en régimen periódico

- Resolver el siguiente circuito en régimen periódico de periodo T

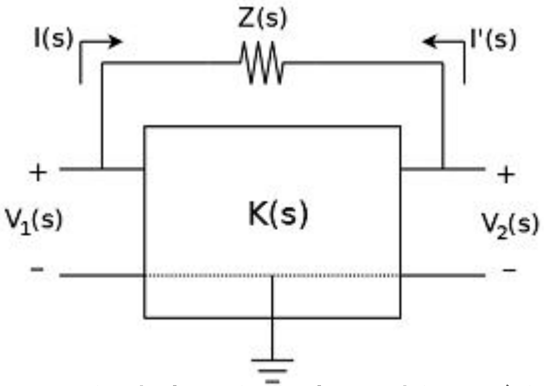




Teorema de Miller

Hipótesis

- Sea una caja negra con cuatro terminales (cuadripolo), dos de entrada y dos de salida.
- Dicha caja se realimenta con una impedancia Z(s)

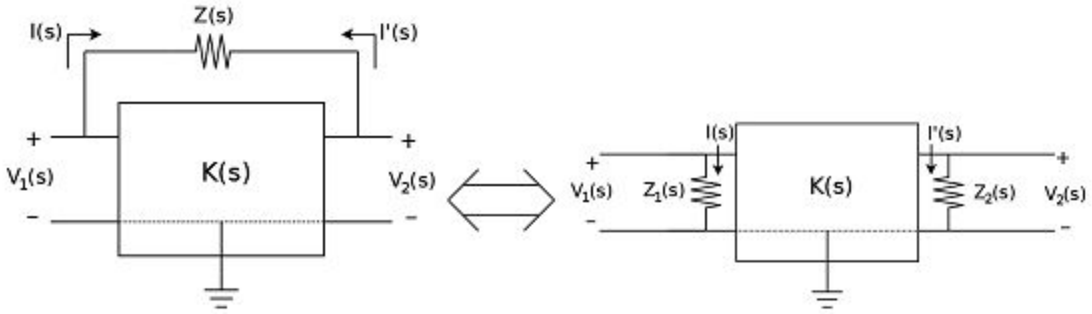


- Sea K(s) la función de transferencia de la caja en lazo abierto (sin Z(s)), K(s) es independiente de Z(s)

Teorema de Miller

Tesis

- Los siguientes circuitos son equivalentes.

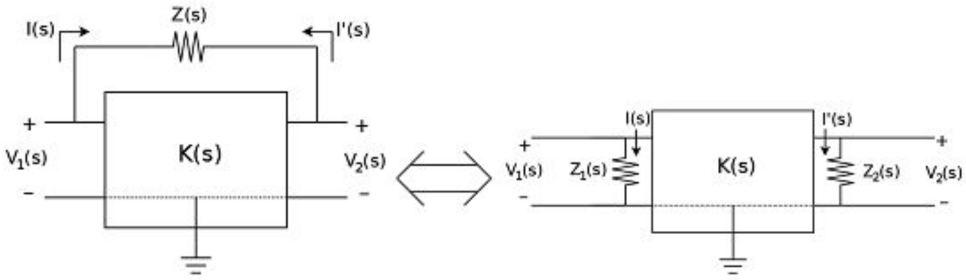


- Donde:

$$Z_1(s) = \frac{Z(s)}{1-K} \quad , \quad Z_2(s) = \frac{K.Z(s)}{K-1}$$

Teorema de Miller

Demostración



- Calculando I_1:

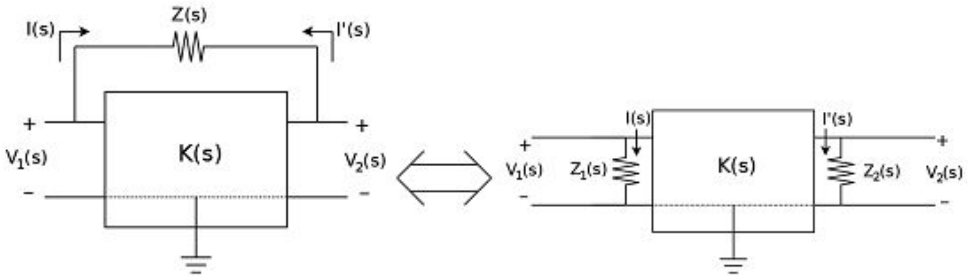
$$I_1(s) = \frac{V_1(s) - V_2(s)}{Z(s)} = \frac{V_1(s) - KV_1(s)}{Z(s)} = \frac{V_1(s)}{\frac{Z(s)}{1-K}}$$

- Entonces:

$$Z_1(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{Z(s)}{1-K}$$

Teorema de Miller

Demostración



- Calculando $I'_1=-I_1$:

$$I_1'(s) = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{Z(s)} = \frac{V_2(s) - \frac{V_2(s)}{K}}{Z(s)} = \frac{(K-1)V_2(s)}{KZ(s)}$$

- Entonces:

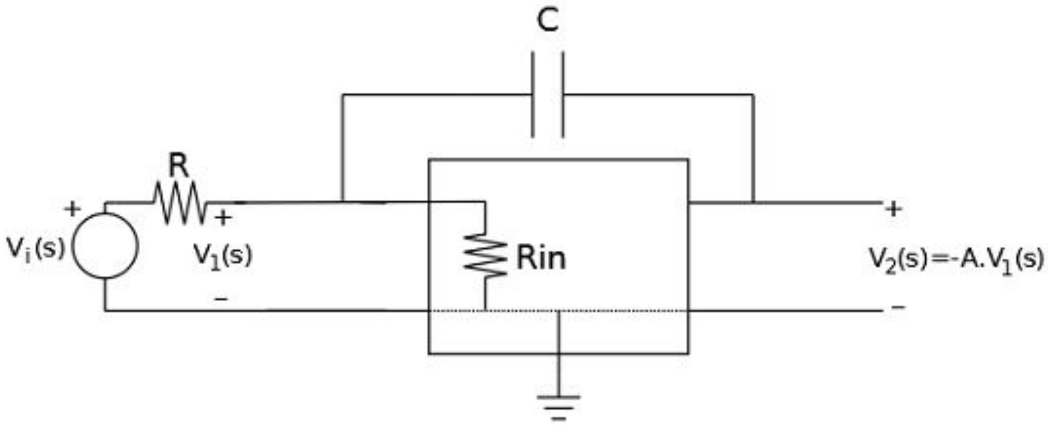
$$Z_2(s) = \frac{V_2(s)}{I_1'(s)} = \frac{KZ(s)}{K-1}$$

Teorema de Miller

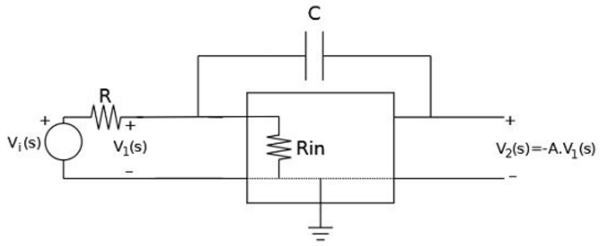
Aplicación

- Efecto capacitivo en amplificadores operacionales:

$$Z(s) = 1/Cs$$
$$K(s) = -A$$



Teorema de Miller



$$Z(s) = 1/Cs$$
$$K(s) = -A$$

Aplicación

- Efecto capacitivo en amplificadores operacionales:

$$Z_v(s) = R + R_{in} || \frac{1}{(A+1)Cs} = R + \frac{1}{(A+1)C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{(A+1)R_{in}C}}$$

- Se introduce un polo en:

$$\omega_0 = \frac{1}{(A+1)R_{in}C}$$

EFECTO CAPACITIVO
(ojo con el polvillo)

FIN