# Teoría de Circuitos 2021

## Transformada de Laplace

Licenciatura en Ingeniería Biológica
Universidad de la República

INGENIERÍA BIOLÓGICA

CENUR Litoral Norte

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

# Recapitulando

**Hasta ahora hemos hecho:**

- Circuitos resistivos en régimen de continua
  - Leyes de Kirchoff
  - Teorema de circuitos
- Amplificadores operacionales
  - Aplicación en régimen de continua en conjunto a circuitos resistivos
- Régimen sinusoidal
  - Fasores, impedancia, función de transferencias, salida en régimen sinusoidal, potencia activa, reactiva y aparente, valores eficaces, diagramas de Bode.
  - Analogía con circuitos resistivos en régimen de continua + amp. op.

¿Qué ocurre en el pasaje al régimen? Análisis transitorio

# Transformada de Laplace

## Definición

- Dada una función $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, se define la **transformada unilateral de Laplace** como:

$$\boxed{F:\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \,/\, F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

- Condición de existencia de la transformada de Laplace:
    - $f(t)$ se puede acotar de la siguiente forma: $\exists\, M>0,\ \alpha \in \mathbb{R} /\ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}\ \forall t \geq 0$
    - A partir de ello se considera la condición suficiente de convergencia:

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-st}|dt \leq \int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-re(s)t}dt = \int_0^{+\infty} Me^{-(re(s)-\alpha)t}dt < +\infty$$

    - Esto se cumple para los $s$ que cumplen: $re(s) > \alpha$

# Transformada de Laplace

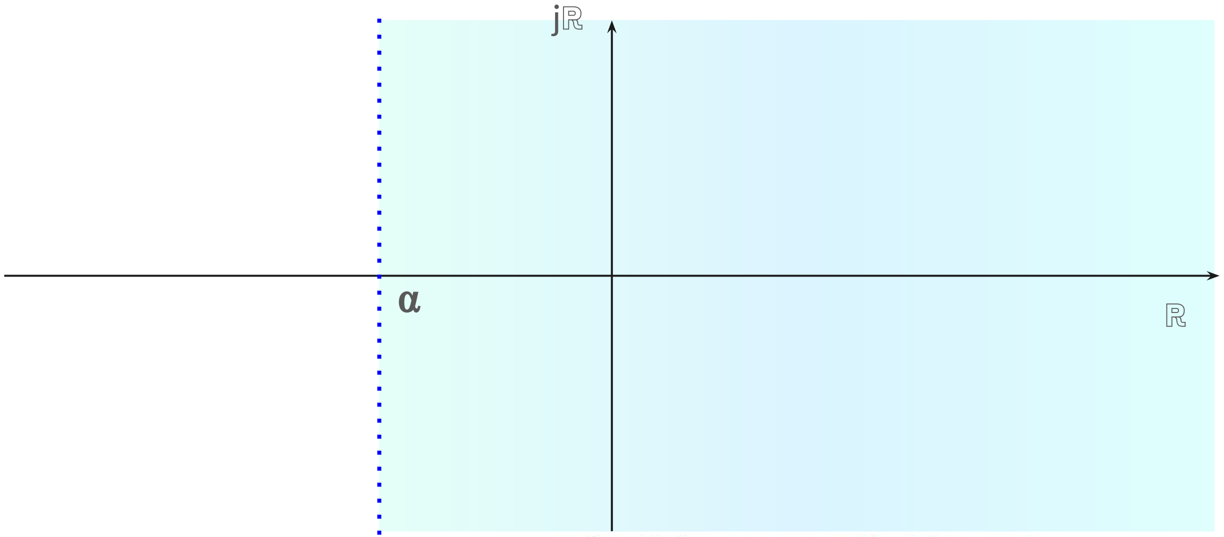
## Semiplano de convergencia

- La existencia de $F(s_0)$ para un determinado $s_0$ depende de la existencia de un $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumpla:
  - $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ $\forall t \geq 0$ para algún $M>0$
  - $re(s_0)>\alpha$
- Notar que si existe $F(s_0)$, entonces existe $F(s)$ $\forall s/\ re(s)>re(s_0)$ (semiplano derecho de convergencia).
- Se define la **abscisa de convergencia** como el menor $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumple $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ $\forall t \geq 0$ para algún $M>0$.
- Este $\alpha$ es el que define el mayor semiplano de convergencia.

$$D(F(s)) = \{s \in \mathbb{C} / re(s) > \alpha\}$$

# Transformada de Laplace

## Semiplano de convergencia



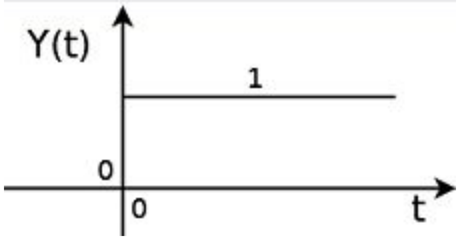

$$D\big(F(s)\big) = \{s \in \mathbb{C} / re(s) > \alpha\}$$

# Transformada de Laplace

**Consideraciones acerca de *ƒ(t)***

- Se considera t=0 como el instante inicial (arranque).
- La función antes de t=0 se considera nula.
- Definición - Escalón de Heaviside:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 \;\; si\; t < 0 \\ 1 \;\; si\; t > 0 \end{cases}$$




- Para contemplar esto, la función a transformar se representa como Y(t).ƒ(t) .
- De aquí en más, nos referiremos indiferentemente a ƒ(t) como a Y(t).ƒ(t) si no se aclara lo contrario.

# Transformada de Laplace

## Algunas propiedades

- Linealidad

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)](s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

- Traslación temporal

$$\mathcal{L}[Y(t-T)f(t-T)](s) = F(s)e^{-Ts}$$

- Traslación en frecuencia

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}](s) = F(s+a)$$

¿Cómo cambia la abscisa de convergencia en cada caso?

# Transformada de Laplace

**Ejemplo 1**

- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = Y(t)e^{-at}, a \in \mathbb{R}$$

- Su transformada queda:

$$\mathcal{L}[Y(t)e^{-at}](s) = \int_0^{+\infty} Y(t)e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \left.\frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{-\lim_{t\to+\infty} e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)0}}{s+a}$$

$$Si\ Re(s) > -a \ \rightarrow \mathcal{L}[Y(t)e^{-at}](s) = \frac{1}{s+a}$$

Notar que su abscisa de convergencia es -*a*

# Transformada de Laplace

## Ejemplo 1

$$f(t) = Y(t)e^{-at}, a \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}[Y(t)e^{-at}](s) = \frac{1}{s+a}$$

- Para el caso *a=0* se tiene que: $$\mathcal{L}[Y(t)](s) = \frac{1}{s}$$

**¿Qué cambia si *a* es complejo?**

En este caso sólo cambia que la abscisa de convergencia es *-Re(a)*

# Transformada de Laplace

## Ejemplo 2

- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = Y(t)\sin(\omega_0 t)$$

- Para ello considerar:
  - Extensión de $\mathcal{L}[Y(t)e^{-at}](s)$ para el caso $a \in \mathbb{C}$
  - Notación compleja de $sin(\omega_0 t)$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

  - Propiedades de transformada de Laplace.

# Transformada de Laplace

## Ejemplo 2

- Operando:

$$\mathcal{L}[Y(t)\sin(\omega_0 t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]$$
$$= \frac{\mathcal{L}\left[e^{j\omega_0 t}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]}{2j}$$
$$= \frac{1}{2j(s - j\omega_0)} - \frac{1}{2j(s + j\omega_0)}$$
$$= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Notar que su abscisa de convergencia es $\mathrm{Re}(j\omega_0)=0$

**Ejercicio: de la misma forma hallar la transformada del coseno**

# Transformada de Laplace

## Ejemplo 3

- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = Y(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$$

**Ejercicio: ¿Cuál es su abscisa de convergencia?**

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}[Y(t)\sin(\omega_0 t)](s) &= \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \\ \mathcal{L}[f(t)e^{-at}](s) &= F(s+a) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathcal{L}[Y(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)](s) = \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

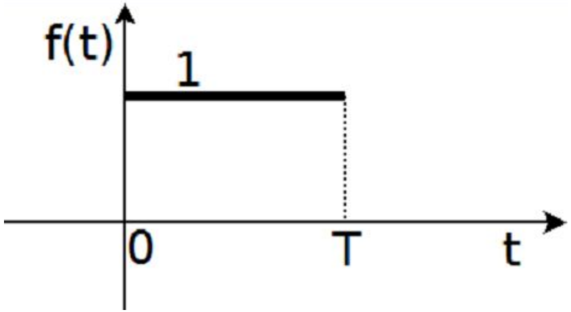
- Considerando:

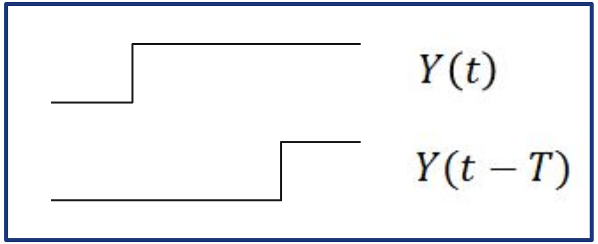
$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2+\omega_0^2}, \qquad \zeta = \alpha/\omega_n \longrightarrow \mathcal{L}\left[Y(t)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right](s) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

# Transformada de Laplace

## Ejemplo 4

- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:




- Notar que esta función se expresa analíticamente como:

$$f(t) = Y(t) - Y(t-T) \longrightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

# Transformada de Laplace

**Transformada de Laplace de una señal periódica**

- Definición - Señal periódica de periodo T
  - Se dice que $f(t)$ es periódica de periodo T si cumple: $f(t+T)=f(t) \quad \forall t$
- La transformada de una señal periódica se calcula:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt$$

- Realizando el cambio de variable *u=t-nT* en cada integral y aplicando la definición de periodicidad se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{T} f(u+nT)e^{-s(u+nT)}du = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} \int_0^{T} f(u)e^{-su}du$$

# Transformada de Laplace

**Transformada de Laplace de una señal periódica**

- Sea $F_1(s)$ la transformada de la señal en un periodo:

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & si\ t \in (0,T) \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

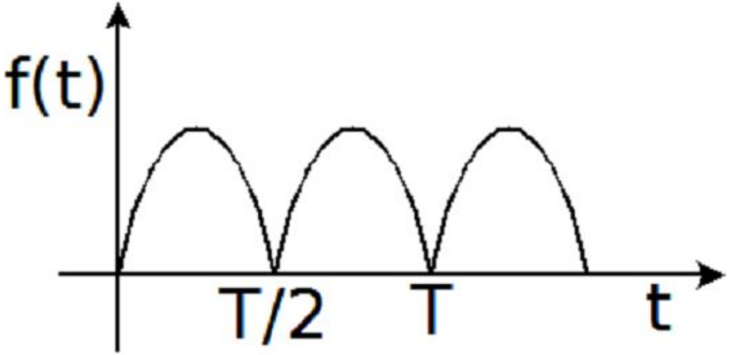
- Entonces, utilizando la expresión de la serie geométrica, se obtiene:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} \int_0^T f(u)e^{-su}du = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} F_1(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

# Transformada de Laplace

**Ejemplo 5 - Seno rectificado de onda completa**

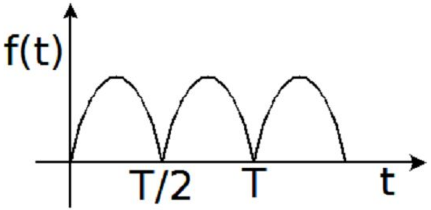
- Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:




- El periodo de esta señal es T/2

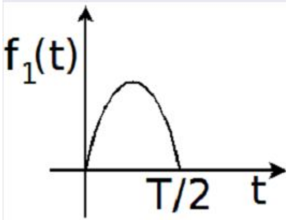
# Transformada de Laplace

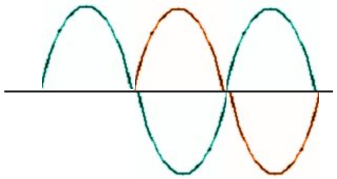
## Ejemplo 5 - Seno rectificado de onda completa




- La señal en un periodo es:

$$f_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)Y(t) + \sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)Y\left(t-\frac{T}{2}\right)$$



- Aplicando las propiedades vistas se obtiene que:

$$F_1(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)$$

- Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-\frac{T}{2}s}} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\frac{\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$$

# FIN