PRÁCTICO 9: HOMOMORFISMOS E ISOMORFISMOS DE GRUPOS

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no homomorfismos de grupo.

a. La función traza de una matriz: $tr : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$.

b. La función $f : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$, dada por: $f(A) = tr(A^2)$.

c. La función determinante $\det : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$; donde $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

d. La función $f : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(A) = det(A^2)$.

e. La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $f(\lambda) = \lambda A$; donde $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada. Hallar condiciones sobre A para que f sea morfismo.

f. La función trasponer $T : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$, dada por: $T(A) = A^t$.

g. La función trasponer $T : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $T(A) = A^t$.

h. La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$.

Ejercicio 2. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos finitos.

a. Sea $g \in G_1$. Probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\mathrm{mcd}(|G_1|, |G_2|)$.

b. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.

c. Supongamos que φ es un isomorfismo de grupos. Sea $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Ejercicio 3. En cada caso, determinar si existe algún **morfismo no trivial** $f : G \to K$ (es decir, que no mande todos los elementos al neutro). Cuando exista, construir **uno**; y si no existe explicar por qué.

a. $G = (\mathbb{Z}_7, +)$ y $K = (S_6, \circ)$.

b. $G = \mathbb{Z}_8$, $K = U(24)$. Sug.: G es cíclico.

c. $G = U(9)$, $K = \mathbb{Z}_{12}$. Sug.: G es cíclico.

d. $G = (S_6, \circ)$ y $K = (\mathbb{Z}_3, +)$. Sugerencia: S_6 es generado por las trasposiciones.

e. $G = U(15)$, $K = \mathbb{Z}_6$. Sugerencia: hallar el orden de todos los elementos de G.

Isomorfismos

Ejercicio 4. Sean G y K dos grupos cíclicos, finitos y de igual orden. Probar que $G \simeq K$. Sugerencia: Sea g un generador de G. Probar que $f : G \to K$ es un isomorfismo sii $f(g)$ es un generador de K.

Ejercicio 5. En cada caso, determinar si los siguientes grupos son isomorfos. En caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

a. Los grupos $(\mathbb{Z}_4, +)$ y $(U(10), \cdot)$.

b. Los grupos D_3 y S_3 (con la composición).

Ejercicio 6. Sea G un grupo y consideramos $f : G \to G$ definido por $f(g) = g^{-1}$, $\forall\ g \in G$. Probar:

a. f es homomorfismo sii G es conmutativo.

b. Si G es conmutativo, f es isomorfismo.

Ejercicio 7. Dado un grupo G, consideremos el conjunto Aut$(G) := \{\varphi : G \to G \ / \ \varphi$ es un **isomorfismo**$\}$, denominado conjunto de automorfismos de G. Aut(G) forma un grupo con la operación de composición.

a. Calcular Aut$(\mathbb{Z})$. Sugerencia: $\mathbb{Z}$ es cíclico.

b. Probar que (Aut$(\mathbb{Z}), \circ) \simeq (\mathbb{Z}_2, +)$.

Ejercicio 8. Probar que si G es cíclico y finito, entonces $|Aut(G)| = \varphi(|G|)$.

Ejercicio 9.

a. Calcular Aut$(\mathbb{Z}_5)$.

b. Probar Aut$(\mathbb{Z}_5) \simeq \mathbb{Z}_4$.

c. Calcular Aut$(\mathbb{Z}_6)$

d. Probar Aut$(\mathbb{Z}_6) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 10. Probar los siguientes isomorfismos entre grupos:

a. Aut$(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b. Aut$(\mathbb{Z}_n) \simeq U(n)$. Sugerencia: hay tantos generadores de $\mathbb{Z}_n$ como elementos de $U(n)$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 11. Sea G un grupo con 4 elementos.

a. Probar que G es abeliano. Sugerencia: suponer que no es abeliano y concluir que $|G| > 4$.

b. Probar que o bien $G \simeq \mathbb{Z}_4$ o bien $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Sugerencia: discutir según si G es cíclico o no.

Ejercicio 12. (Examen Julio 2012)

a. Sea $\phi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos finitos. Probar que se cumple:

$$o(\phi(g)) \mid \operatorname{mcd}(|G_1|, |G_2|),\ \forall\ g \in G_1.$$

b. Hallar todos los homomorfismos $\phi : \mathbb{Z}_2 \to U(8)$.

c. Hallar p primo, sabiendo que existe un homomorfismo no trivial $\phi : \mathbb{Z}_{51} \to \mathbb{Z}_p$, tal que $\phi(\overline{17}) = \overline{0}$.