

El Método Simplex: Adaptación a Otras Formas del Modelo

Introducción y motivación

Hasta ahora hemos aprendido el método simplex bajo el supuesto de que el problema se encuentra en la **forma estándar**:

- Función objetivo: **maximizar**
- Restricciones funcionales: todas de la forma \leq
- Lados derechos: todos **no negativos** ($b_i \geq 0$)

En la práctica, los modelos de programación lineal presentan otras configuraciones legítimas. La sección 4.6 de Hillier y Lieberman describe con precisión "la adaptación del método simplex a otras formas de modelos". El único problema serio que introducen estas formas alternativas es **identificar una solución básica factible inicial** (SBF inicial).

La herramienta que resuelve este problema de arranque se llama **técnica de variables artificiales**.

1. Recordatorio: la forma estándar y las variables de holgura

Antes de analizar las otras formas, conviene recordar el punto de partida.

Ejemplo de referencia (Wyndor Glass Co.):

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{sujeto a: } x_1 \leq 4, 2x_2 \leq 12, 3x_1 + 2x_2 \leq 18, x_1, x_2 \geq 0$$

Para convertir las restricciones \leq en ecuaciones se agregan **variables de holgura** $x_3, x_4, x_5 \geq 0$:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

Clave conceptual: Las variables de holgura sirven como variables básicas iniciales porque, con $x_1 = x_2 = 0$, sus valores son exactamente los lados derechos: $x_3 = 4$, — todos no negativos, lo que garantiza una SBF inicial obvia.

2. Restricciones en forma de igualdad (¿)

¿Qué ocurre?

Cuando una restricción ya es una igualdad, **no existe variable de holgura** que pueda hacer el papel de variable básica inicial.

Procedimiento: Variable Artificial + Método de la Gran M

Paso 1. Introducir una **variable artificial** \acute{x} (se distingue con una barra) en la restricción de igualdad, como si fuera una holgura temporal.

Paso 2. Penalizar esa variable artificial en la función objetivo con un coeficiente $-M$ (donde M representa un número positivo muy grande), para forzarla a ser cero en la solución óptima.

Supongamos que la tercera restricción del ejemplo Wyndor Glass se convierte en igualdad:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2 - M\acute{x}_5$$

sujeto a:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + \acute{x}_5 = 18 \leftarrow \text{variable artificial}$$

La **SBF inicial artificial** es: $x_3 = 4$, (variables básicas), con $x_1 = x_2 = 0$ (no básicas).

Paso previo importante: Antes de aplicar la prueba de optimalidad, se debe **eliminar la variable artificial de la fila 0** (ecuación objetivo) mediante operaciones de eliminación gaussiana. En este caso, se resta de la fila 0 la ecuación 3 multiplicada por M :

$$\text{Nueva Ec. 0: } Z - (3 - 3M)x_1 - (5 - 2M)x_2 - 18M = 0$$

Interpretación

- Si al final del proceso símplex la variable artificial **vale cero**, la solución es factible para el problema real.
- Si **vale positivo** en la solución óptima, el problema no tiene solución factible (las restricciones son incompatibles).

3. Restricciones funcionales de la forma \geq

¿Qué ocurre?

Una restricción \geq indica un **límite inferior** sobre las actividades. Al convertirla en ecuación, se **resta** una variable de exceso (o superávit) $x_s \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_s = b_i, x_s \geq 0$$

Pero esta variable de exceso tiene coeficiente -1 , no $+1$, por lo que **no puede ser variable básica inicial** (daría valor negativo).

Procedimiento: Variable de Exceso + Variable Artificial

Paso 1. Restar la **variable de exceso** x_s para convertir \geq en \leq .

Paso 2. Agregar además una **variable artificial** x' para obtener la SBF inicial.

Paso 3. Penalizar la variable artificial con $-M$ en la función objetivo (si se maximiza) o con $+M$ (si se minimiza).

Ejemplo en pizarrón — Problema de Terapia de Radiación

$$\text{Minimizar } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

sujeto a:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \rightarrow 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \rightarrow 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 = 6 \text{ (artificial)}$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \rightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

El problema artificial completo queda:

$$\text{Minimizar } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + Mx_4 + Mx_6$$

Nota clave sobre la penalización: El signo del coeficiente de la variable artificial en la función objetivo depende del tipo de optimización:

SBF inicial: $x_3 = 2.7$, con $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

Resumen del manejo de la variable de exceso

Tipo de restricción	Conversión a ecuación	Variable básica inicial
\leq	Agregar holgura $+x_s$	x_s (directo)
\leq	Ninguna transformación	Variable artificial x'
\geq	Restar exceso $-x_s$, luego agregar artificial x'	Variable artificial x'

4. Lados derechos negativos ($b_i < 0$)

¿Qué ocurre?

Si el lado derecho de una restricción es negativo, la variable de holgura o artificial tomaría un valor negativo en la SBF inicial, violando las restricciones de no negatividad.

Procedimiento: Multiplicar por -1

La solución es simple: **multiplicar ambos lados de la restricción por -1** . Esto invierte el sentido de la desigualdad.

Regla: Al multiplicar por -1 :

Ejemplo en pizarrón

Supongamos la restricción:

$$-x_1 - x_2 \leq -1 \text{ (equivalente a } x_1 + x_2 \geq 1)$$

Multiplicando por -1 :

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

Ahora el lado derecho es positivo y podemos proceder con el método habitual (variable de exceso + variable artificial).

Segundo ejemplo:

Si tenemos la ecuación $-2x_1 + x_2 = -5$, multiplicamos por -1 :

$$2x_1 - x_2 = 5$$

Ahora el lado derecho es positivo y se agrega una variable artificial x_3 a esta ecuación.

Resumen: Siempre que haya un lado derecho negativo, multiplicar la restricción completa por -1 antes de agregar variables de holgura, exceso o artificiales.^{[2][1]}

5. Minimización en lugar de maximización

¿Qué ocurre?

El método símplex estándar fue diseñado para maximización. Para minimizar, se deben ajustar las reglas de decisión.

Método 1: Conversión a maximización (Hillier)

Minimizar Z equivale a maximizar $-Z$:

$$\min Z = \sum c_j x_j \iff \max(-Z) = - \sum c_j x_j$$

Se resuelve el problema de maximización de $-Z$ y al final el valor óptimo de Z es el negativo de la solución obtenida.

Método 2: Modificar la condición de optimalidad (Taha)

En lugar de convertir, se mantiene la minimización pero se **invierten las reglas del símplex**:

Regla	Maximización	Minimización
Variable de entrada	Variable no básica con coeficiente más negativo en la fila Z	Variable no básica con coeficiente más positivo en la fila Z
Criterio de optimalidad	Todos los coeficientes de la fila Z son ≥ 0	Todos los coeficientes de la fila Z son ≤ 0
Variable de salida	Prueba de la razón mínima (sin cambio)	Prueba de la razón mínima (sin cambio)

Intuición: En maximización, queremos aumentar Z , por eso elegimos el coeficiente más negativo en la fila z (el que más crece). En minimización, queremos disminuir Z , por eso elegimos el coeficiente más positivo (el que más lo reduce).

Ejemplo en pizarrón — Método de la Gran M con minimización

Retomando el problema de terapia de radiación:

$$\text{Minimizar } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + Mx_4 + Mx_6$$

La tabla símplex inicial (tras eliminar las artificiales de la fila z):

Básica	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Sol
z	1	$0.4 - 1.1$	$0.5 - 0.9$	0	$-M$	0	$-M$	$-9M$
x_3	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
x_4	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
x_6	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6

Como estamos **minimizando**, la variable de entrada es la que tiene el **coeficiente más positivo** en la fila z . Los coeficientes de x_1 y x_2 son negativos (dominados por $-M$), así que la más positiva relativa es la que conviene más para reducir el gran costo artificial.^{[2][1]}

6. El Método de las Dos Fases (alternativa a la Gran M)

El método de la Gran M puede presentar problemas numéricos por el uso de M como número grande. Una alternativa más robusta computacionalmente es el **método de las dos fases**.

Fase I: Encontrar una SBF inicial factible

Se construye una función objetivo auxiliar que minimiza la **suma de todas las variables artificiales**:

$$\text{Minimizar } r = \sum x_i (\text{suma de artificiales})$$

- Si el mínimo de $r=0$: existe solución factible para el problema original \rightarrow continuar con Fase II.
- Si el mínimo de $r>0$: el problema original **no tiene solución factible**.

Fase II: Resolver el problema original

Se usa la SBF final de la Fase I como punto de partida para el método símplex aplicado a la función objetivo original. Las columnas de las variables artificiales se eliminan de la tabla.

Ventaja del método de dos fases: No requiere asignar valor numérico a M , evitando errores de redondeo. Es el método preferido en los códigos computacionales profesionales.

7. Resumen completo del procedimiento de preparación

Antes de aplicar el método símplex a cualquier modelo de PL, se deben realizar estos ajustes en orden:^{[2][1]}

1. **Lados derechos negativos:** Multiplicar la restricción por -1 (invierte el sentido).
2. **Restricciones \leq :** Agregar variable de holgura x_s \rightarrow usarla como variable básica inicial.
3. **Restricciones \leq :** Agregar variable artificial x' \rightarrow penalizar en función objetivo.
4. **Restricciones \geq :** Restar variable de exceso x_s , luego agregar variable artificial x' \rightarrow penalizar en función objetivo.
5. **Minimización:** Usar coeficiente $+M$ para las artificiales (en lugar de $-M$), o invertir la regla de optimalidad, o convertir a maximización multiplicando la función objetivo por -1 .

8. Otro ejemplo

Enunciado

$$\text{Minimizar } Z=4x_1+x_2$$

sujeto a:

$$3x_1+x_2 \geq 3 \text{ (restricción } \geq \text{)}$$

$$4x_1+3x_2 \geq 6 \text{ (restricción } \geq \text{)}$$

$$x_1+2x_2 \leq 4 \text{ (restricción } \leq \text{)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Paso 1: Conversión a forma de ecuación

Restricción	Transformación	Ecuación resultante
$3x_1 + x_2 \geq 3$	Restar x_3 , agregar R_1	$3x_1 + x_2 - x_3 + R_1 = 3$
$4x_1 + 3x_2 \geq 6$	Restar x_4 , agregar R_2	$4x_1 + 3x_2 - x_4 + R_2 = 6$
$x_1 + 2x_2 \leq 4$	Agregar x_5	$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$

Paso 2: Función objetivo modificada (Método M, minimización)

$$\text{Minimizar } Z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

Paso 3: SBF inicial

Variables básicas: $R_1 = 3, R_2 = 6, x_5 = 4$

Variables no básicas: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Paso 4: Eliminar artificiales de la fila z

Nueva fila z = fila z anterior - M · (fila R_1) - M · (fila R_2):

$$z - (4 - 7M)x_1 - (1 - 4M)x_2 + Mx_3 + Mx_4 = -9M$$

Paso 5: Aplicar el método símplex

Como se **minimiza**, la variable de entrada es la no básica con el **coeficiente más positivo** en la fila z. Con M muy grande, el coeficiente de x_1 es $-(4 - 7M) = 7M - 4 > 0$ y el de x_2 es $4M - 1 > 0$. Elegimos x_1 (coeficiente mayor). Se aplica la prueba de razón mínima para determinar la variable saliente, y se continúan las iteraciones hasta que todos los coeficientes en la fila z sean ≤ 0 .^{[2][1]}

Solución óptima: $x_1 = 3/5, x_2 = 9/5, Z = 21/5 = 4.2$

9. Puntos clave para recordar

- Las **variables de holgura** se usan en restricciones \leq y representan la capacidad no utilizada.
- Las **variables de exceso** se usan en restricciones \geq y representan el superávit sobre el límite mínimo.
- Las **variables artificiales** son herramientas de cómputo puras; no tienen significado físico y deben valer cero en la solución óptima del problema real.
- En el **método de la Gran M**: si alguna variable artificial es positiva en la solución final, el problema original no tiene solución factible.
- La técnica de la Gran M y el método de dos fases son equivalentes en exactitud; la diferencia es computacional.
- Para **minimizar directamente** con el símplex: la variable de entrada es la no básica con coeficiente **más positivo** en la fila z, y el criterio de parada es que todos los coeficientes sean ≤ 0 .

Apéndice: Tabla de Conversión Rápida

Forma del modelo	Transformación necesaria	Variables a introducir
$\sum a_{ij} x_j \leq b_i,$	Ninguna adicional	Holgura X_s
$\sum a_{ij} x_j = b_i,$	Ninguna de desigualdad	Artificial \acute{X}
$\sum a_{ij} x_j \geq b_i,$	Resta de exceso	Exceso X_s + Artificial \acute{X}
Cualquier restricción con $b_i < 0$	Multiplicar por -1 primero	Luego aplicar regla correspondiente
Minimizar Z	Cambiar a $\max(-Z)$ o invertir regla simplex	—