Caso de soluciones múltiples

Problema

Maximizar:

$ Z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 $

Sujeto a:

$x_1+2x_2+x_3 \le 14$

$3x_1+x_2+x_3 \le 14$

$x_1+x_2+x_3 \le 8$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Paso 1 — Forma Estándar

Se agregan variables de holgura $s_1, s_2, s_3 \ge 0$:

$x_1+2x_2+x_3+s_1=14$

$3x_1+x_2+x_3+s_2=14$

$x_1+x_2+x_3+s_3=8$

$Z-2x_1-4x_2-2x_3=0$

Paso 2 — Tabla Inicial

Base inicial: $\{s_1, s_2, s_3\}$, con $Z=0$.

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	1	2	1	1	0	0	14
s_2	3	1	1	0	1	0	14
s_3	1	1	1	0	0	1	8
Z	−2	**−4**	−2	0	0	0	**0**

Paso 3 — Iteración 1

Variable entrante: el coeficiente más negativo en la fila Z es **−4** (columna x_2). Entra x_2.

Test de la razón mínima:

Fila	RHS / coef x_2
s_1	14 / 2 = 7 mínimo
s_2	14 / 1 = 14
s_3	8 / 1 = 8

Sale s_1. **Elemento pivote = 2** (fila 1, columna x_2).

Operaciones de pivoteo:

- Nueva F1 = F1 ÷ 2
- Nueva F2 = F2 − 1·(nueva F1)
- Nueva F3 = F3 − 1·(nueva F1)
- Nueva FZ = FZ + 4·(nueva F1)

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
x_2	1/2	1	1/2	1/2	0	0	7
s_2	5/2	0	1/2	−1/2	1	0	7
s_3	1/2	0	1/2	−1/2	0	1	1
Z	**0**	0	**0**	**2**	0	0	**28**

Paso 4 — Verificación del Criterio de Optimalidad

Todos los coeficientes de la fila Z son ≥ **0**. El algoritmo se detiene: se alcanzó el óptimo en la primera iteración.

$$Z_{max}=28\,,x_1=0\,,x_2=7\,,x_3=0$$

Identificación de Soluciones Múltiples

Aquí aparece el **caso particular:** los coeficientes de x_1 y x_3 en la fila Z son exactamente **0**, aunque ambas son variables **no básicas**. Esto indica que pueden entrar a la base sin cambiar el valor de Z. [3]

Segunda solución óptima: hacemos entrar x_3

Elegimos x_3 como variable entrante (costo reducido = 0). Test de la razón mínima:

Fila	RHS / coef x_3
x_2	7 / (1/2) = 14
s_2	7 / (1/2) = 14 → empate
s_3	1 / (1/2) = **2** mínimo

Sale s_3. **Elemento pivote = 1/2**.

Operaciones de pivoteo:

- Nueva F3 = F3 ÷ (1/2) = F3 × 2
- Nueva F1 = F1 − (1/2)·(nueva F3)
- Nueva F2 = F2 − (1/2)·(nueva F3)
- Nueva FZ = FZ − 0·(nueva F3) → **Z no cambia**

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
x_2	0	1	0	1	0	−1	6
s_2	2	0	0	0	1	−1	6
x_3	1	0	1	−1	0	2	2
Z	0	0	0	2	0	0	**28**

Segunda solución óptima: $x_1=0, x_2=6, x_3=2, Z=28$.

Las Infinitas Soluciones Óptimas

Cualquier combinación convexa de ambas soluciones también es óptima. Para $\lambda \in [0,1]$:

$$(x_1, x_2, x_3)=\lambda(0,7,0)+(1-\lambda)(0,6,2)=(0,6+\lambda,2-2\lambda)$$

Con $Z=2(0)+4(6+\lambda)+2(2-2\lambda)=24+4\lambda+4-4\lambda=28$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Resumen del Caso

	Solución 1	Solución 2
x_1	0	0
x_2	7	6
x_3	0	2
Z	**28**	**28**

Señal de soluciones múltiples: en la tabla óptima, una o más variables **no básicas** tienen costo reducido = **0** en la fila Z. Hacer entrar esa variable genera otra solución igualmente óptima sin mejorar ni empeorar Z.