Aplicando el Simplex reducido paso a paso – Ejemplo con solución óptima.

Problema

Maximizar:

$ Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 $

Sujeto a:

$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 240$

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 270$

$5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 420$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Paso 1 — Forma Estándar

Se agregan variables de holgura $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ para convertir las desigualdades en igualdades:

$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 240$

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 270$

$5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + s_3 = 420$

$Z - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$

Paso 2 — Tabla Simplex Inicial

La base inicial es $\{s_1, s_2, s_3\}$ con solución básica factible $x_1 = x_2 = x_3 = 0,$.

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	6	4	2	1	0	0	240
s_2	3	2	5	0	1	0	270
s_3	5	6	5	0	0	1	420
Z	**−5**	**−4**	**−3**	0	0	0	**0**

Paso 3 — Iteración 1

Seleccionar variable entrante: el coeficiente más negativo en la fila Z es **−5** (columna x_1). Entra x_1.

Test de la razón mínima (solo filas con coeficiente > 0 en la columna pivote):

Fila	RHS / coef x_1
s_1	240 / 6 = **40** mínimo
s_2	270 / 3 = 90
s_3	420 / 5 = 84

Sale s_1. **Elemento pivote = 6** (fila 1, columna x_1).

Operaciones de pivoteo (Gauss-Jordan): se divide la fila 1 entre 6 para obtener la nueva fila pivote, luego se eliminan los demás coeficientes de x_1:

- Nueva Fila 1 = Fila 1 ÷ 6
- Nueva Fila 2 = Fila 2 − 3·(nueva Fila 1)
- Nueva Fila 3 = Fila 3 − 5·(nueva Fila 1)
- Nueva Fila Z = Fila Z + 5·(nueva Fila 1)

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
x_1	1	2/3	1/3	1/6	0	0	40
s_2	0	0	4	−1/2	1	0	150
s_3	0	13/3	10/3	−5/6	0	1	220
Z	0	**−2/3**	**−4/3**	5/6	0	0	**200**

Paso 4 — Iteración 2

Variable entrante: coeficiente más negativo es **−4/3** (columna x_3). Entra x_3.

Test de la razón mínima:

Fila	RHS / coef x_3
x_1	40 / (1/3) = 120
s_2	150 / 4 = **37.5** mínimo
s_3	220 / (10/3) = 66

Sale s_2. **Elemento pivote = 4** (fila 2, columna x_3).

Operaciones de pivoteo:

- Nueva F2 = F2 ÷ 4
- Nueva F1 = F1 − (1/3)·(nueva F2)
- Nueva F3 = F3 − (10/3)·(nueva F2)
- Nueva FZ = FZ + (4/3)·(nueva F2)

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
x_1	1	2/3	0	1/4	−1/12	0	87/2
x_3	0	0	1	−1/8	1/4	0	75/2
s_3	0	13/3	0	−1/4	−5/6	1	715/3
Z	0	**−2/3**	0	3/4	1/3	0	**≈237.5**

Paso 5 — Iteración 3

Variable entrante: coeficiente más negativo es **−2/3** (columna x_2). Entra x_2.

Test de la razón mínima (solo coeficientes > 0 en columna x_2):

Fila	RHS / coef x_2
x_1	(87/2) / (2/3) = 130.5
x_3	— (coef = 0)
s_3	(715/3) / (13/3) = **55** mínimo

Sale s_3. **Elemento pivote = 13/3**.

Operaciones de pivoteo:

- Nueva F3 = F3 ÷ (13/3) = F3 × (3/13)
- Nueva F1 = F1 – (2/3)·(nueva F3)
- Nueva FZ = FZ + (2/3)·(nueva F3)

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
x_1	1	0	0	7/26	1/26	−2/13	35
x_3	0	0	1	−1/8	1/4	0	75/2
x_2	0	1	0	−3/52	−5/26	3/13	55
Z	0	0	0	+	+	+	**≈275**

Solución Óptima

Todos los coeficientes de la fila Z son ≥ **0**, por lo que se alcanzó el óptimo.

$$x_1 = 35, x_2 = 55, x_3 = 37.5$$

$$Z_{max} = 5(35) + 4(55) + 3(37.5) = 175 + 220 + 112.5 = 507.5$$

Las variables de holgura $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, lo que significa que **las tres restricciones están activas** (se usan todos los recursos disponibles).