

Muestreo de señales en tiempo continuo

Modulación y Procesamiento de Señales
Autores: Ernesto López, Mauricio Ramos
{elopez, mramos}@fing.edu.uy
Modificado: Juan Cardelino
juanc@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Litoral Norte
Sede Paysandú
Licenciatura en Ing. Biológica

Curso 2018

Muestreo de señales en tiempo continuo

Introducción

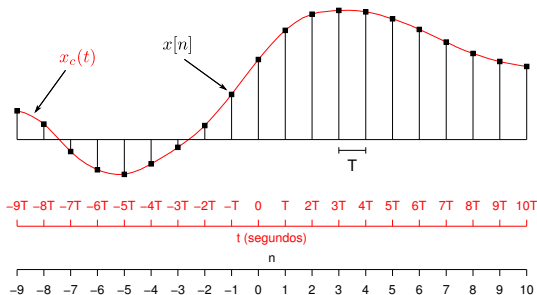
- ▶ Existen señales que son intrínsecamente de tiempo discreto, pero es común construir señales en tiempo discreto a partir del **muestreo de señales de tiempo continuo**.
- ▶ Las señales en tiempo continuo se pueden representar con mucha exactitud a partir de muestras tomadas en instantes discretos de tiempo.
- ▶ El objetivo es estudiar:
 - ▶ El proceso del muestreo periódico de señales continuas.
 - ▶ Las condiciones a cumplir para que el muestreo sea apropiado. El muestreo es apropiado si es posible reconstruir la señal continua original a partir de las muestras de la señal en tiempo discreto.
 - ▶ Los problemas que aparecen cuando el muestreo no es apropiado.
 - ▶ Como reconstruir la señal en tiempo continuo a partir de la señal en tiempo discreto.

Muestreo periódico

- ▶ El método típico para obtener una representación en tiempo discreto $x[n]$ a partir de una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ es mediante el **muestreo periódico**,

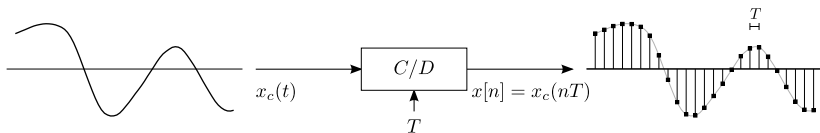
$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

- ▶ T es el **período de muestreo** (segundos).
- ▶ $f_s = \frac{1}{T}$ es la **frecuencia de muestreo** (muestras por segundo)
- ▶ La frecuencia de muestreo también puede expresarse en radianes por segundo como $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.



Muestreo periódico

- ▶ El sistema que implementa el muestreo periódico se llama **conversor de tiempo continuo a tiempo discreto ideal** (conversor C/D):

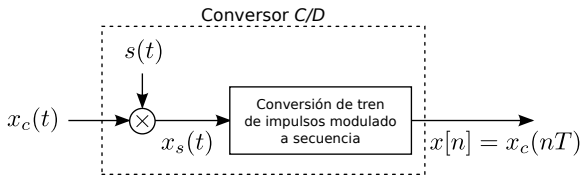


- ▶ En la práctica, la operación de muestreo se implementa con un **conversor analógico-digital** (conversor A/D). Este sistema puede verse como una aproximación del conversor C/D .

Muestreo periódico

Representación matemática del conversor C/D

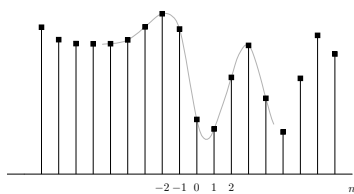
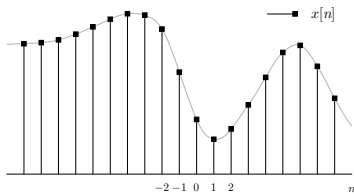
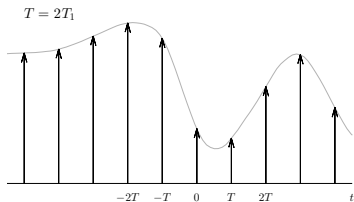
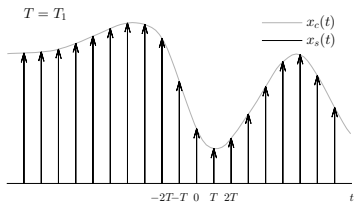
- ▶ Es útil representar matemáticamente el conversor C/D en dos etapas:
 1. modulación de la señal en tiempo continuo con un tren de impulsos periódico de período T segundos.
 2. conversión del tren de impulsos modulado a una secuencia discreta



- ▶ La señal continua se convierte a una señal intermedia $x_s(t)$ también continua, pero que vale cero excepto en los instantes de muestreo. Esta señal es convertida a una secuencia indexada con enteros que no contiene explícitamente información sobre la frecuencia de muestreo.
- ▶ Este sistema no representa ningún dispositivo físico para implementar la operación de muestreo. Es solo una representación matemática conveniente para analizar el proceso de muestreo.

Muestreo periódico

Representación matemática del conversor C/D



Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Objetivo: encontrar la relación entre el espectro de la señal de entrada y la señal de salida del conversor C/D . Esto es necesario para deducir el **teorema de muestreo**.

- ▶ Se considera primero la conversión de $x_c(t)$ a $x_s(t)$ mediante la modulación de un tren de impulsos periódico $s(t)$.
 - ▶ La modulación de $s(t)$ con $x_c(t)$ es

$$\begin{aligned}x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\end{aligned}\quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- ▶ Por el teorema de la modulación (ver apéndice), la transformada de Fourier de $x_s(t)$ es

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * S(j\omega) \quad (1)$$

$$x_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_c(j\omega)$$

$$s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega)$$

- ▶ La transformada del tren de impulsos periódico es otro tren de impulsos periódico (ver apéndice) con período la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T$ en radianes por segundo,

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

- ▶ Sustituyendo el resultado en la ecuación 1, se tiene que

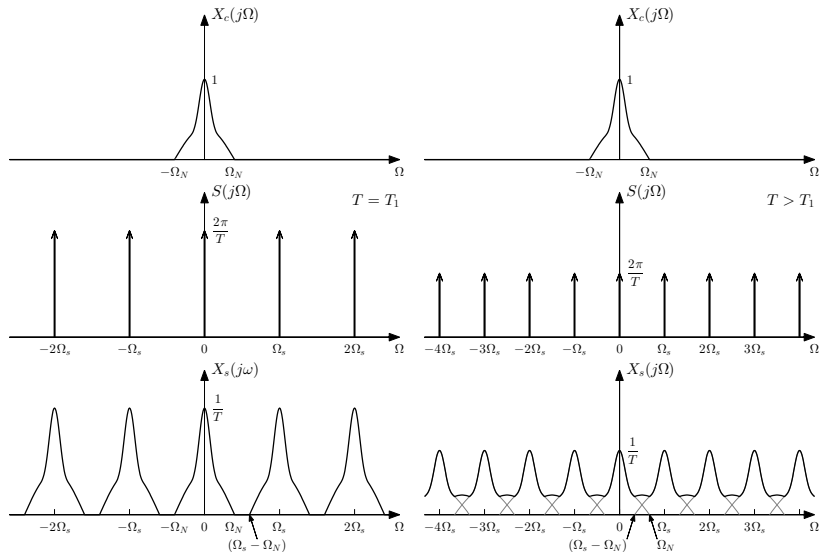
$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

- ▶ Finalmente, se llega a que

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)).$$

- ▶ Esta ecuación da la relación entre la transformada de Fourier de la entrada y la transformada de Fourier de la salida del modulador.
- ▶ Indica que la transformada de Fourier de $x_s(t)$ consiste en copias de la transformada de Fourier de $x_c(t)$ desplazadas múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y superpuestas.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia



Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

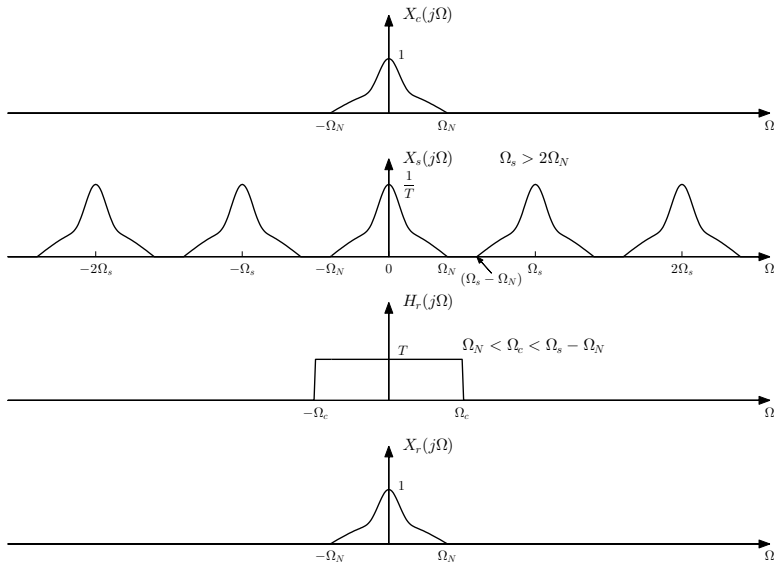
- ▶ ¿En que condiciones es posible recuperar $x_c(t)$ a partir de $x_s(t)$?
- ▶ Se asume que la señal $x_c(t)$ es de banda limitada, y que el componente espectral de mayor frecuencia es ω_N .
- ▶ El espectro de $x_s(t)$ consiste en la suma de copias del espectro de $x_c(t)$ separadas en frecuencia la frecuencia de muestreo ω_s .
- ▶ Si las réplicas no se solapan, se mantienen copias exactas (salvo un factor de escala de $1/T$) del espectro de la señal original y podría ser recuperada.
- ▶ En la figura, se ve que las copias del espectro no se solapan si se cumple que

$$\omega_s - \omega_N > \omega_N \quad \Rightarrow \quad \omega_s > 2\omega_N$$

- ▶ Por el contrario, si las réplicas se solapan, el espectro de $x_s(t)$ no contiene una réplica exacta del espectro de $x_c(t)$ y la señal original no puede ser recuperada.
- ▶ Para recuperar la señal original hay que usar un filtro pasabajos ideal.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Recuperación de la señal original



Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Recuperación de la señal original

- ▶ Para recuperar la señal se tiene que cumplir que $\omega_s > 2\omega_N$. Esto significa que la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble de la máxima frecuencia que contiene la señal.
- ▶ En ese caso, la señal original se puede recuperar mediante el filtrado con un pasabajos ideal con ganancia T ,

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \text{con} \quad \omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N$$

- ▶ De esta forma, la señal filtrada es,

$$\begin{aligned} X_r(j\omega) &= H_r(j\omega)X_s(j\omega) \\ &= X_c(j\omega), \end{aligned}$$

por lo que se reconstruye la señal original.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Aliasing

- ▶ En el caso en que no se cumple la condición para que las copias de $X_c(j\omega)$ no se solapen, es decir,

$$\omega_s < 2\omega_N,$$

no es posible recuperar $X_c(j\omega)$ mediante el filtrado pasabajos.

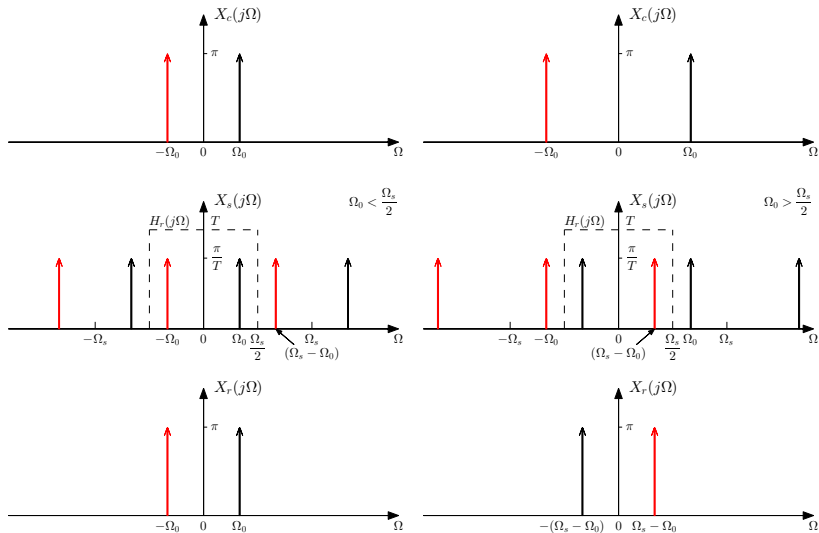
- ▶ Cuando esto ocurre, la señal recuperada $x_r(t)$ es una versión distorsionada de la señal original. Este tipo de distorsión se denomina **aliasing**.
- ▶ Para estudiar el efecto del aliasing, se considera como ejemplo el muestreo de la señal sinusoidal

$$x_c(t) = \cos \omega_0 t.$$

- ▶ Se fija la frecuencia de muestreo ω_s y se toma ω_0 tal que
 - $\omega_0 < \frac{\omega_s}{2}$: no hay aliasing
 - $\omega_0 > \frac{\omega_s}{2}$: hay aliasing

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Aliasing



Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Aliasing

- ▶ Teniendo que cuenta que el espectro de $x_c(t)$ es (ver apéndice, ecuación 12)

$$X_c(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

y realizando el análisis en el dominio de la frecuencia se llega a que:

- i. Si $\omega_0 < \frac{\omega_s}{2}$, la señal recuperada es

$$x_r(t) = \cos \omega_0 t$$

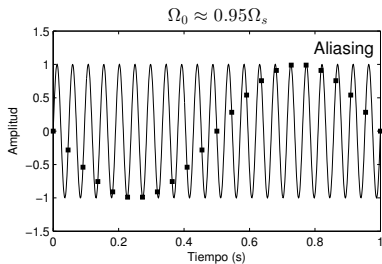
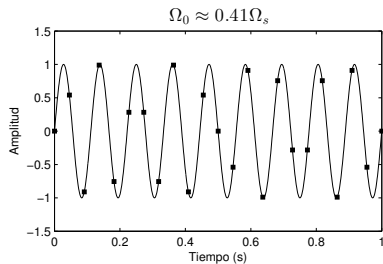
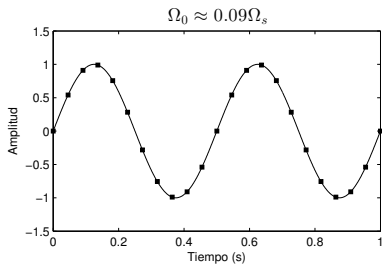
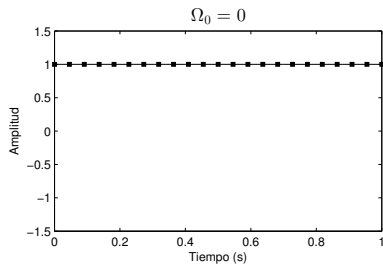
- ii. Si $\omega_0 > \frac{\omega_s}{2}$, la señal recuperada es

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t$$

- ▶ En el segundo caso, la señal cambió de identidad (adoptó un alias) transformándose en una señal de menor frecuencia como consecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Aliasing



Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Teorema de muestreo

Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada con

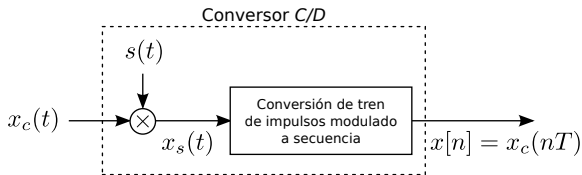
$$X_c(j\omega) = 0, \quad \text{para } |\omega| \geq \omega_N.$$

Entonces, $x_c(t)$ está unívocamente determinada por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_N.$$

- ▶ Si una señal se muestrea a una frecuencia de muestreo superior al doble de la frecuencia máxima que contiene la señal, las muestras determinan unívocamente a la señal.
- ▶ La mayor frecuencia que contiene la señal (ω_N) se llama **frecuencia de Nyquist**.
- ▶ El doble de la frecuencia de Nyquist, es decir, la frecuencia que tiene que ser superada por la frecuencia de muestreo para poder recuperar la señal, se llama **tasa de Nyquist**.
- ▶ El teorema de muestreo es también referido como **teorema de muestreo de Nyquist-Shannon**, ya que fue conjeturado por Nyquist en 1928 y demostrado por Shannon en 1949.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia



- ▶ Se vió que la relación entre el espectro de $x_s(t)$ y $x_c(t)$ es

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)).$$

- ▶ Falta encontrar la relación entre el espectro de la secuencia discreta $x[n]$ con el espectro de la señal continua original.
- ▶ La salida de la señal modulada con el tren de pulsos era

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

- ▶ Aplicando la transformada continua de Fourier a $x_s(t)$,

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT} \end{aligned}$$

- ▶ Además, como $x[n] = x_c(nT)$, se llega a que

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nT}$$

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

- ▶ Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de tiempo discreto se define como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

- ▶ se concluye que

$$X_s(j\omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\omega T} = X(e^{j\omega T}). \quad (2)$$

- ▶ Finalmente, sustituyendo $X_s(j\omega)$, se llega a que

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)), \quad (3)$$

o equivalentemente,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right), \quad (4)$$

donde se usó además que $\omega_s = 2\pi/T$.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

- ▶ Las ecuaciones 2, 3 y 4 indican que el espectro de la señal discreta $X(e^{j\omega})$ es una versión escalada en frecuencia de $X_s(j\omega)$, con el factor de escala dado por $\omega = \omega T$.
- ▶ Esto significa que dado el espectro $X_s(j\omega)$ del tren de pulsos modulado con la señal, para obtener el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta, simplemente se multiplica el eje de frecuencia analógica ω por T .
- ▶ Este escalamiento también puede ser pensado como una normalización del eje de frecuencias, en donde la frecuencia analógica de muestreo ω_s se normaliza a $\omega = 2\pi$,

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega_s = \omega_s T = 2\pi.$$

- ▶ La normalización en frecuencia en la transformación de $X_s(j\omega)$ a $X(e^{j\omega})$ está vinculada a que hay una normalización temporal en la transformación de $x_s(t)$ a $x[n]$
 - ▶ El espaciamiento entre muestras en $x_s(t)$ es el periodo de muestreo T , mientras que en $x[n]$ es siempre unitario. El eje temporal se normaliza con un factor de T .
 - ▶ De forma acorde, el eje de frecuencia se normaliza por un factor de $f_s = 1/T$.

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Ejemplo: muestreo y reconstrucción de una senoide

- ▶ Se considera una senoide en tiempo continuo de frecuencia $f_0 = 2000$ Hz y se muestrea usando una frecuencia de muestreo de $f_s = 6000$ Hz.
- ▶ La frecuencia de la senoide en radianes por segundo es

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 4000\pi \text{ rad/s.}$$

- ▶ Además, el período de muestreo y la frecuencia de muestreo en radianes por segundo son respectivamente,

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{6000} \text{ s,} \quad \omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} = 12000\pi \text{ rad/s.}$$

- ▶ Notar que $\omega_s > 2\omega_0$ y por lo tanto se cumplen las condiciones del teorema de muestreo. La señal queda unívocamente determinada por las muestras, no hay aliasing y se puede reconstruir.
- ▶ La señal en tiempo continuo es $x_c(t) = \cos(\omega_0 t) = \cos(4000\pi t)$

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Ejemplo: muestreo y reconstrucción de una senoide

- ▶ La señal en tiempo discreto obtenida mediante el muestreo es

$$x[n] = x_c(nT) = \cos(4000\pi nT) = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right),$$

es decir, la frecuencia de la señal en tiempo discreto es $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$.

Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ La transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo es

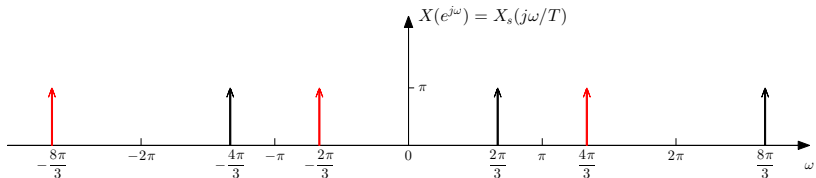
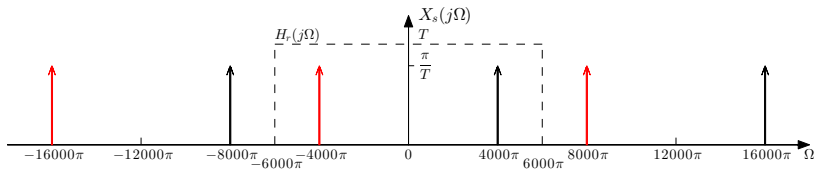
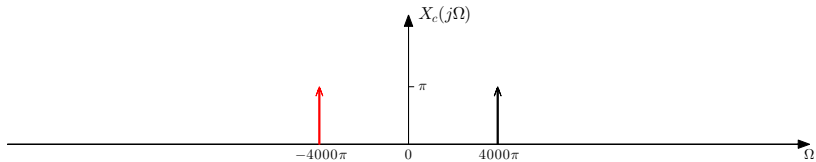
$$X_c(j\omega) = \pi\delta(\omega - 4000\pi) + \pi\delta(\omega + 4000\pi),$$

esto es, un par de impulsos en las frecuencias $\omega_0 = \pm 4000\pi$.

- ▶ El espectro de la señal $X_s(j\omega)$ consiste en copias de $X_c(j\omega)$ centradas en $0, \pm\omega_s, \pm 2\omega_s, \dots$
- ▶ Finalmente, el espectro de la secuencia discreta es $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ y se obtiene simplemente multiplicando el eje de frecuencia ω por T .

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Ejemplo: muestreo y reconstrucción de una senoide



Reconstrucción de la señal a partir de las muestras

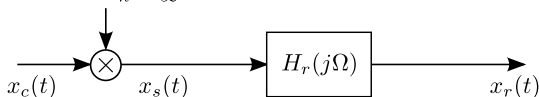
- ▶ Se vio previamente que si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo, y si el tren de pulsos modulado es filtrado mediante un filtro pasabajos ideal apropiado, la transformada de Fourier de la salida del filtro es idéntica a la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo $x_c(t)$.
- ▶ Esto implica que la salida del filtro será $x_c(t)$.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_r(j\omega) = X_c(j\omega)$$

↓

$$x_r(t) = x_c(t)$$



- ▶ Dada la secuencia $x[n]$, es posible armar el tren de impulsos $x_s(t)$, en donde a los sucesivos impulsos se le asigna un área igual a las sucesivas muestras,

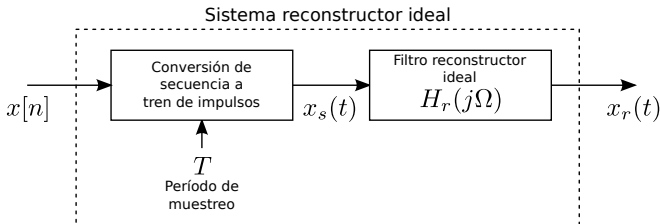
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT),$$

donde T es el período de muestreo asociado con la secuencia $x[n]$.

Reconstrucción de la señal a partir de las muestras

- ▶ Si el tren de impulsos es la entrada a un pasabajos ideal de respuesta en frecuencia $H_r(j\omega)$ y respuesta al impulso $h_r(t)$, la salida será

$$\begin{aligned}x_r(t) &= h_r(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \right) \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (h_r(t) * \delta(t - nT)) \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT)\end{aligned}\tag{5}$$



Reconstrucción de la señal a partir de las muestras

- ▶ El pasabajos rector ideal tiene ganancia T y frecuencia de corte ω_c tal que $\omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N$.
- ▶ Como para cumplir con el teorema de muestreo debe ocurrir que $\omega_N < \omega_s/2$, una elección conveniente y común de ω_c es

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}.$$

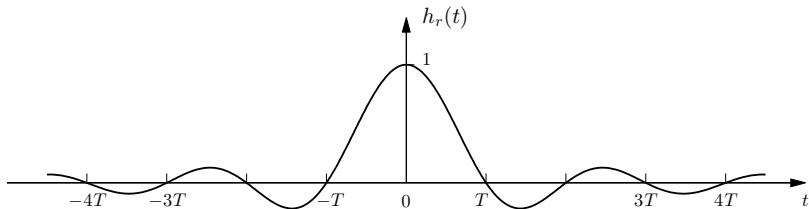
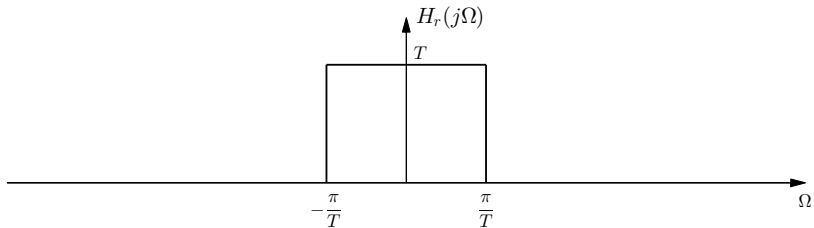
- ▶ Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del pasabajos rector es

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

- ▶ La respuesta al impulso $h_r(t)$ se obtiene aplicando la transformada de Fourier inversa a $H_r(j\omega)$, y da (ver apéndice, ecuación 14)

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (6)$$

Reconstrucción de la señal a partir de las muestras



Reconstrucción de la señal a partir de las muestras

- ▶ Sustituyendo la respuesta al impulso (ecuación 6) en la ecuación de la salida del filtro (ecuación 5), se llega a que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}. \quad (7)$$

Observaciones

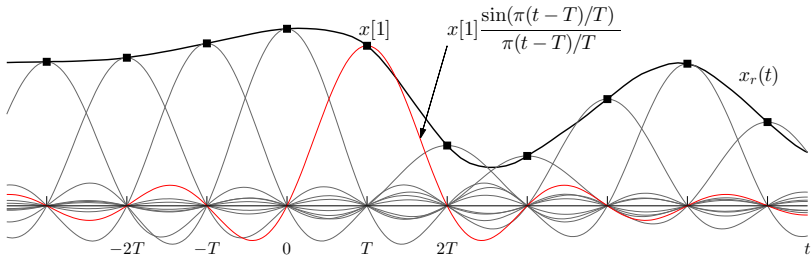
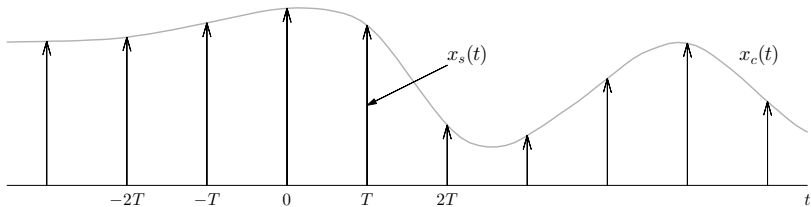
- ▶ Se vio en el dominio de la frecuencia que si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo, $X_r(j\omega) = X_c(j\omega)$, y por lo tanto, $x_r(t) = x_c(t)$, pero esto no es obvio a partir de la ecuación 7.
- ▶ Sin embargo, puede verse que como

$$h_r(0) = 1 \quad \text{y} \quad h_r(nT) = 0, \quad \forall n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

se cumple que $x_r(mT) = x_c(mT)$ para todo m entero.

- ▶ Esto significa que la señal reconstruida es idéntica a la señal original en los instantes de muestreo.
- ▶ En el resto de los valores temporales, el filtro reconstructor ideal construye a la señal original interpolando entre los impulsos de $x_s(t)$, pero el hecho de que la interpolación reconstruye correctamente a la señal original proviene del análisis en el dominio de la frecuencia.

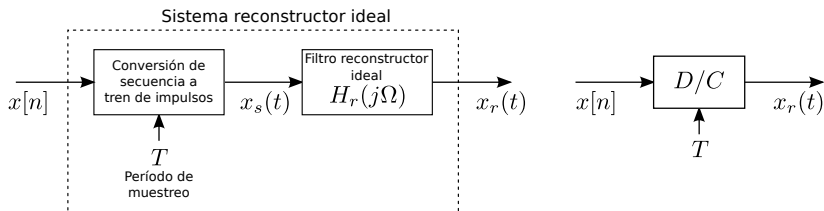
Reconstrucción de la señal a partir de las muestras



Reconstrucción de la señal a partir de las muestras

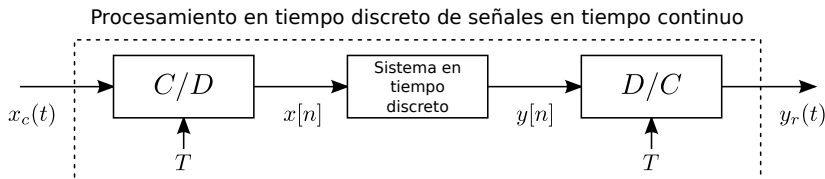
Convertor de tiempo discreto a tiempo continuo ideal

- ▶ El sistema para reconstruir la señal de banda limitada a partir de las muestras de la secuencia se denomina **Convertor de tiempo discreto a tiempo continuo ideal** (convertor D/C).



Procesamiento de señales analógicas en tiempo discreto

- ▶ **Convertor C/D**: obtención de una representación en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo.
- ▶ **Convertor D/C**: reconstrucción de la señal en tiempo continuo a partir de las muestras de la señal en tiempo discreto.
- ▶ Una aplicación fundamental de los sistemas en tiempo discreto es en el procesamiento de señales en tiempo continuo:

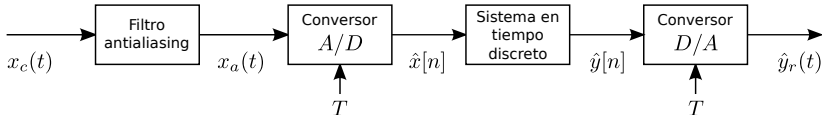


- ▶ Las características del sistema global dependen del sistema en tiempo discreto y de la frecuencia de muestreo.
- ▶ El análisis del sistema global hay que hacerlo para cada caso particular.

Procesamiento de señales analógicas en tiempo discreto

Sistema práctico para el procesamiento de señales analógicas

- ▶ Los sistemas de conversión C/D y D/C son modelos teóricos útiles para comprender los detalles matemáticos de la relación entre la señal de tiempo continuo y sus muestras.
- ▶ En la práctica, ocurre que:
 - ▶ Las señales en tiempo continuo nunca son de banda limitada.
 - ▶ No se pueden realizar pasabajos ideales (por ejemplo, como el que se necesita para reconstruir la señal analógica a partir de sus muestras)
 - ▶ Los sistemas que implementan los conversores C/D y D/C no son perfectos y se llaman **conversor analógico a digital (A/D)** y **conversor digital a analógico (D/A)** respectivamente.
- ▶ Modelo mas real del procesamiento de señales analógicas:



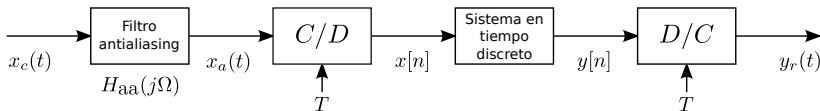
Procesamiento de señales analógicas en tiempo discreto

Filtro antialiasing

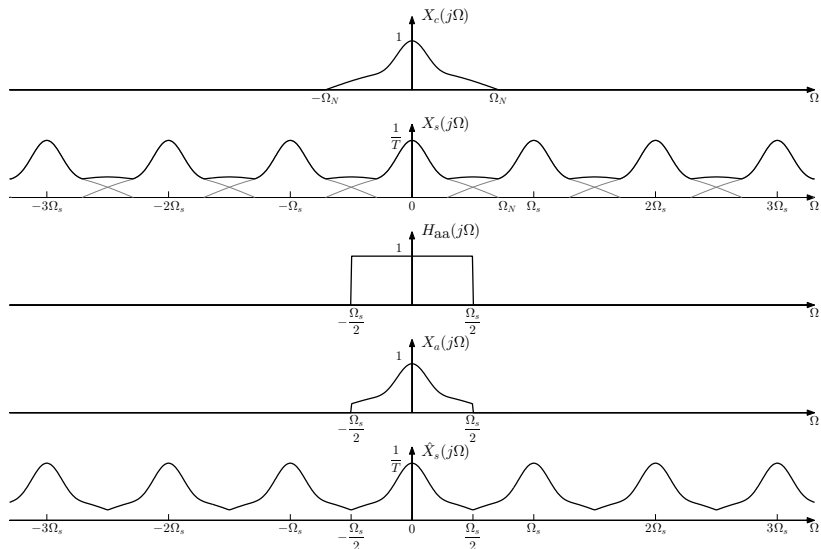
- ▶ El filtro antialiasing es un filtro pasabajos que se aplica sobre la señal continua antes de ser muestreada con el objetivo de limitarla en banda acorde a la frecuencia de muestreo, de forma que el muestreo se realice bajo las condiciones del teorema de muestreo.
- ▶ Es de tiempo continuo y la respuesta en frecuencia esta dada por,

$$H_{aa}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/T = \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

- ▶ Aun en una situación teórica siempre es conveniente emplear un filtro antialiasing porque la distorsión producida por aliasing es peor que la pérdida de ancho de banda.



Procesamiento de señales analógicas en tiempo discreto



Cambio de la frecuencia de muestreo

Objetivo

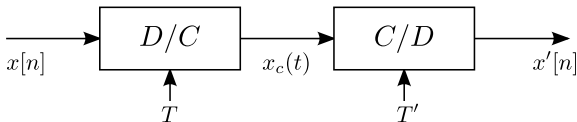
- ▶ Se vio previamente que una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ puede representarse a partir de muestras tomadas con período T ,

$$x[n] = x_c(nT).$$

- ▶ Muchas veces es necesario cambiar la frecuencia de muestreo, es decir, obtener a partir de $x[n]$ una nueva representación en tiempo discreto de la señal continua de la forma,

$$x'[n] = x_c(nT'), \quad \text{con } T' \neq T.$$

- ▶ Una alternativa es reconstruir $x_c(t)$ a partir de $x[n]$ usando un conversor D/C y remuestrear $x_c(t)$ con período T' para obtener $x'[n]$,



Cambio de la frecuencia de muestreo

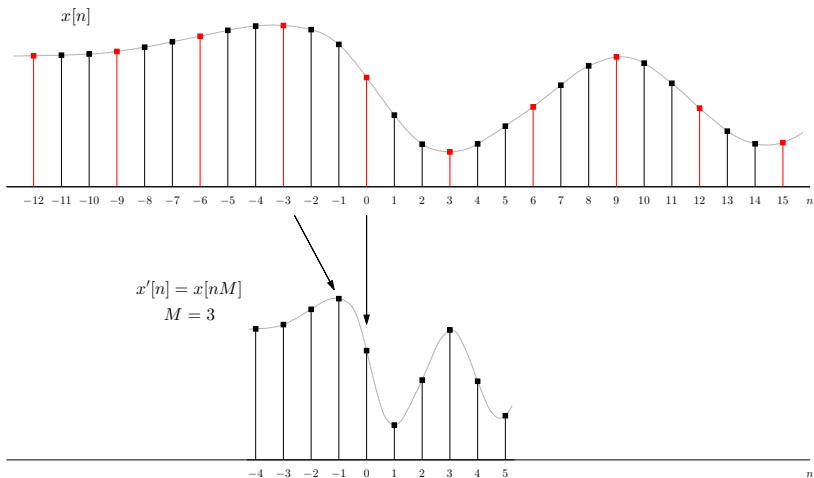
Objetivo

- ▶ Problemas de este enfoque:
 - ▶ Los conversores D/C y C/D son sistemas ideales que no pueden ser implementados en la práctica.
 - ▶ En la práctica se emplean conversores D/A y A/D que no son ideales e introducen errores en el proceso.
- ▶ Como consecuencia, es de interés considerar métodos para cambiar la frecuencia de muestreo que involucren solo operaciones en tiempo discreto.

Reducción de la frecuencia de muestreo

- Para reducir la frecuencia de muestreo por un **factor entero**, lo único que hay que hacer es “muestrear” la secuencia original,

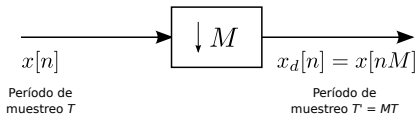
$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT).$$



Reducción de la frecuencia de muestreo

- ▶ El sistema que realiza la operación de la reducción de la tasa de muestreo se llama **compresor de la frecuencia de muestreo**, y la operación se llama **submuestreo**.

Representación del compresor



- ▶ De la definición de la operación, es claro que $x_d[n]$ es idéntica a la secuencia que se obtendría muestreando $x_c(t)$ con período de muestreo $T' = MT$.
- ▶ Por lo tanto, si la señal continua $x_c(t)$ es de banda limitada con

$$X_c(j\omega) = 0 \quad \text{para} \quad |\omega| \geq \omega_N,$$

$x_d[n]$ es una representación sin aliasing de $x_c(t)$ si

$$\frac{\omega'_s}{2} = \frac{\pi}{T'} = \frac{\pi}{MT} \geq \omega_N. \quad (\text{teorema de muestreo})$$

Reducción de la frecuencia de muestreo

- ▶ Equivalentemente, para evitar aliasing en el submuestreo, la frecuencia de muestreo original tiene que cumplir que

$$\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \geq M\omega_N.$$

- ▶ Es decir, la frecuencia de muestreo puede reducirse un factor M sin producir aliasing si
 - ▶ la frecuencia de muestreo original es al menos M veces la tasa de Nyquist,
 - ▶ o el ancho de banda de la secuencia original se reduce un factor M mediante el filtrado en tiempo discreto.

Reducción de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ Al igual que en el caso de muestreo de señales continuas, es útil encontrar la relación entre el espectro de la entrada y el espectro de la salida del compresor.
 - ▶ En este caso, la relación es entre transformadas de Fourier de tiempo discreto.
- ▶ Por un lado, el espectro de la secuencia original $x[n] = x_c(nT)$ en función del espectro de $x_c(t)$ es (ecuación 4),

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

- ▶ Análogamente, el espectro de $x_d[n] = x[nM] = x_c(nT')$, con $T' = MT$ es

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'} \right) \right)$$

Reducción de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ La ecuación anterior indica que $X_d(e^{j\omega})$ se compone de copias de $X_c(j\omega)$ escaladas en frecuencia como $\omega = \omega T$ y desplazadas múltiplos enteros de $2\pi/T'$.
- ▶ Sustituyendo $T' = MT$ se llega a que,

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT} \right) \right). \quad (8)$$

- ▶ Notar que el índice r de la sumatoria puede expresarse como

$$r = i + kM, \quad -\infty < k < \infty, \quad 0 \leq i \leq M - 1.$$

De esta forma, r continúa siendo un entero que va de $-\infty$ a ∞ .

- ▶ Haciendo este cambio de variable, la ecuación 8 queda

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right].$$

Reducción de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ El término entre paréntesis rectos es el espectro de la señal original (ecuación 4) evaluado en $(\omega - 2\pi i)/M$, es decir,

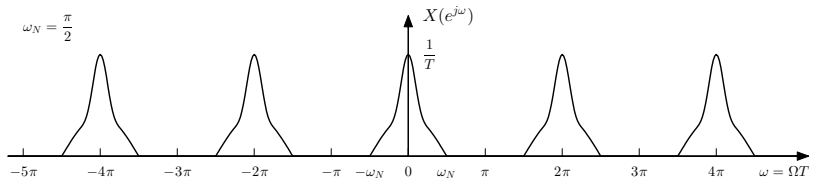
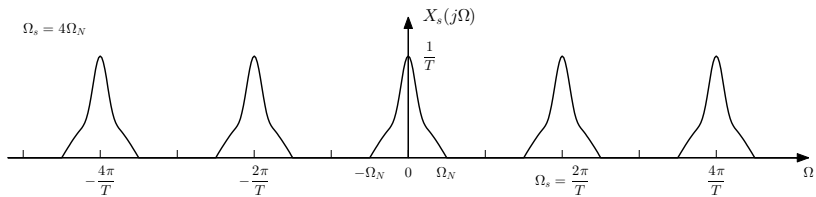
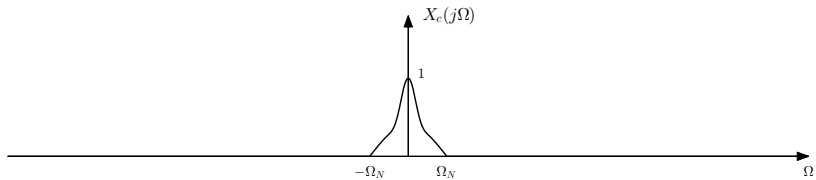
$$X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right).$$

- ▶ Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, se llega a que

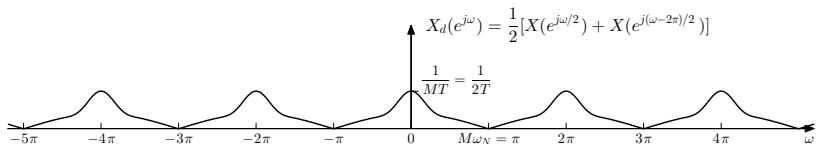
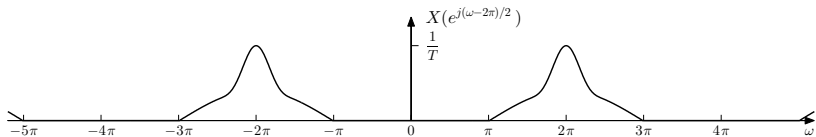
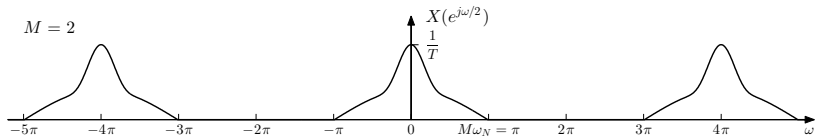
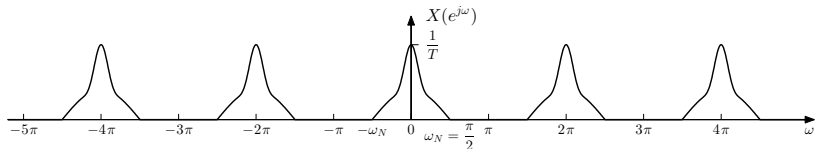
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}). \quad (9)$$

- ▶ Esta ecuación expresa la transformada de Fourier $X_d(e^{j\omega})$ de la secuencia submuestreada $x_d[n]$ en función de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la secuencia original $x[n]$.
- ▶ Indica que $X_d(e^{j\omega})$ consiste en M copias de $X(e^{j\omega})$ escaladas en frecuencia por M y desplazadas múltiplos enteros de 2π .

Reducción de la frecuencia de muestreo



Reducción de la frecuencia de muestreo



Reducción de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ En el ejemplo mostrado en las figuras anteriores,
 - ▶ Se considera una señal discreta con espectro $X(e^{j\omega})$ que proviene del muestreo de una señal continua $X_c(j\omega)$ de ancho de banda ω_N .
 - ▶ La frecuencia de muestreo es $\omega_s = 4\omega_N$, y por lo tanto, se cumplen las condiciones del teorema de muestreo y no se produce aliasing.
 - ▶ La señal discreta es de banda limitada con ancho de banda

$$\omega_N = \omega_N T = \frac{\omega_s}{4} T = \frac{\pi}{2}.$$

- ▶ La señal discreta se submuestra con $M = 2$. Esto significa que $x_d[n]$ se construye tomando una de cada dos muestras de $x[n]$.
- ▶ El espectro de la señal submuestreada $X_d(e^{j\omega})$ contiene las copias del espectro de la señal original en múltiplos de 2π , pero escaladas en frecuencia un factor de M respecto al espectro de la señal discreta original $X(e^{j\omega})$.

Reducción de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

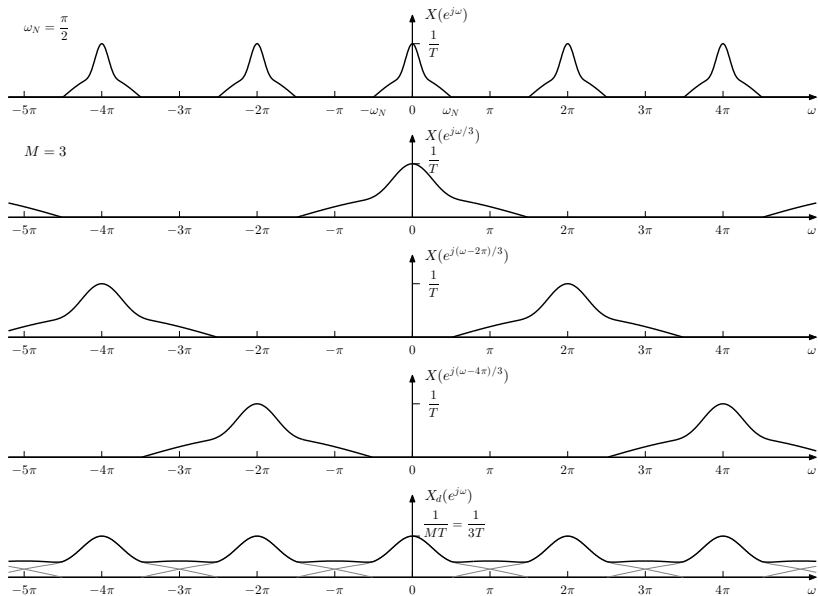
- ▶ En la figura, puede verse que para evitar aliasing se tiene que cumplir que,

$$\omega_N M \leq 2\pi - \omega_N M \quad \Rightarrow \quad \omega_N \leq \frac{\pi}{M}.$$

- ▶ Es decir, al submuestrear una señal discreta de ancho de banda ω_N por un factor de M , no se produce aliasing si $\omega_N \leq \pi/M$.
- ▶ El ejemplo de la figura representa el caso extremo:
 - ▶ La frecuencia de muestreo original es exactamente el doble del mínimo para evitar aliasing.
 - ▶ Al submuestrearla por un factor de $M = 2$ no se produce aliasing.
 - ▶ Si se submuestreara por un factor mayor, si se produciría aliasing.
- ▶ Considérese el caso anterior, pero ahora la señal discreta se submuestra con $M = 3$.
- ▶ Como $\omega_N = \pi/2$, ahora se cumple que,

$$\omega_N > \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{3} \quad (\text{hay aliasing})$$

Reducción de la frecuencia de muestreo



Reducción de la frecuencia de muestreo

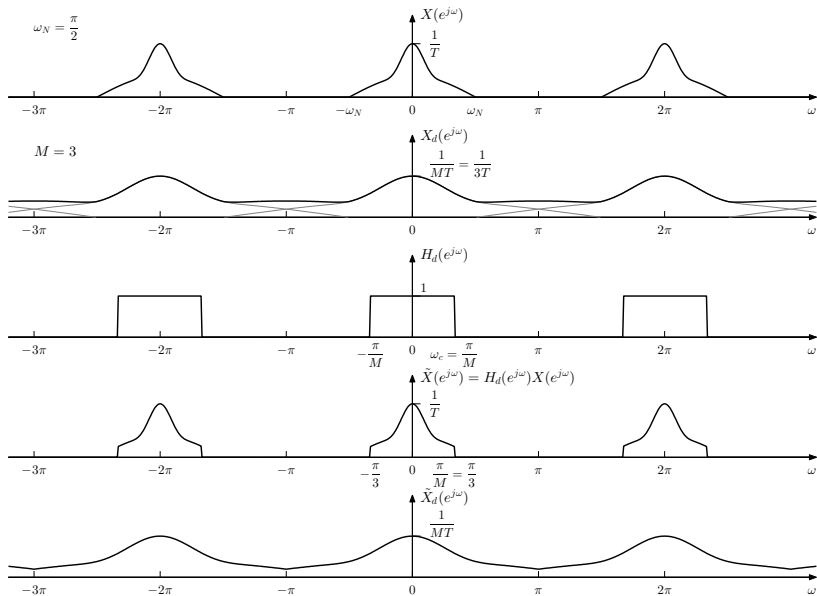
Filtrado pasabajos para evitar aliasing

- ▶ Si la condición $\omega_N \leq \pi/M$ no se cumple, se produce aliasing. Aún así, es posible evitarlo a costa de reducir el ancho de banda de la señal $x[n]$.
- ▶ Concretamente, se filtra la señal $x[n]$ con un filtro pasabajos ideal discreto de frecuencia de corte

$$\omega_c = \frac{\pi}{M}.$$

- ▶ De esta forma, la señal filtrada $\tilde{x}[n]$, tiene ancho de banda $\omega_N = \pi/M$ y puede submuestrearse sin aliasing.
- ▶ Notar que debido al filtrado, la secuencia submuestreada es $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}[nM]$, y ya no representa a la señal continua $x_c(t)$ en los instantes de muestreo, es decir, no se cumple que $\tilde{x}_d[n] = x_c(nMT)$.

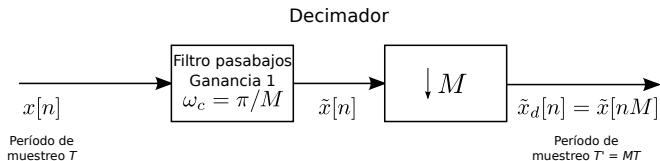
Reducción de la frecuencia de muestreo



Reducción de la frecuencia de muestreo

Filtrado pasabajos para evitar aliasing

- ▶ El sistema general para submuestrear una señal por un factor M consiste en un pasabajos de frecuencia de corte $\omega_c = \pi/M$ seguido de un compresor, y se denomina **decimador**:



Reducción de la frecuencia de muestreo

Analogía con el muestreo de señales continuas

Muestreo de señal continua

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

- ▶ Transformada de Fourier de $x[n]$ muestreada con periodo de muestreo T , en términos de la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo $x_c(t)$.
- ▶ Se escala en frecuencia el espectro de la señal analógica $x_c(t)$ por el factor T y se superponen infinitas copias desplazados múltiplos de 2π .

Submuestreo de señal discreta

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M})$$

- ▶ Transformada de Fourier de la secuencia submuestreada $x_d[n]$ con periodo de muestreo M , en términos de la transformada de Fourier $x[n]$.
- ▶ Se escala en frecuencia el espectro de la señal discreta $x[n]$ por el factor M y se superponen M copias desplazadas múltiplos de 2π .

Incremento de la frecuencia de muestreo

- ▶ Así como la reducción de la frecuencia de muestreo es una operación análoga a la conversión C/D , el incremento de la frecuencia de muestreo es análogo a la conversión D/C .
- ▶ Se considera ahora el caso en que se quiere incrementar un factor L la frecuencia de muestreo de una señal $x[n]$.
- ▶ Si la señal continua original era $x_c(t)$, el objetivo es obtener muestras

$$x_i[n] = x_c(nT'), \quad \text{con} \quad T' = T/L$$

a partir de la secuencia de muestras

$$x[n] = x_c(nT).$$

- ▶ La operación de incrementar la frecuencia de muestreo se llama **interpolación** (*upsampling*).
- ▶ A partir de la definición, se ve que

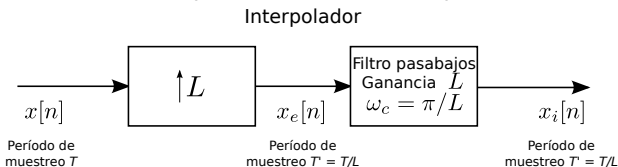
$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots,$$

es decir,

$$x_i[0] = x[0], \quad x_i[L] = x[1], \quad x_i[2L] = x[2], \quad x_i[3L] = x[3], \dots$$

Incremento de la frecuencia de muestreo

- Sistema general para el incremento de la frecuencia de muestreo empleando únicamente procesamiento en tiempo discreto:



- El primer sistema se llama **expansor de la tasa de muestreo**, y la salida es

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

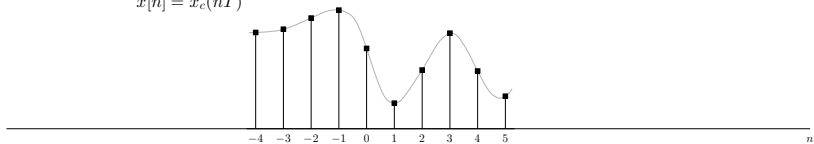
o equivalentemente,

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL].$$

- El segundo sistema es un pasabajos de tiempo discreto con frecuencia de corte π/L y ganancia L . Este sistema juega un rol similar al filtro reconstructor ideal del conversor D/C .

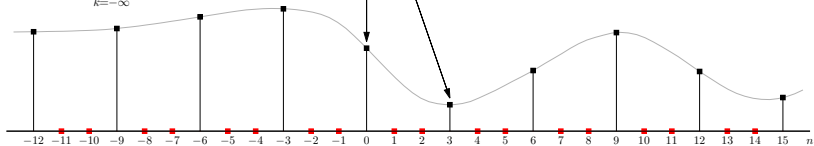
Incremento de la frecuencia de muestreo

$$x[n] = x_c(nT)$$

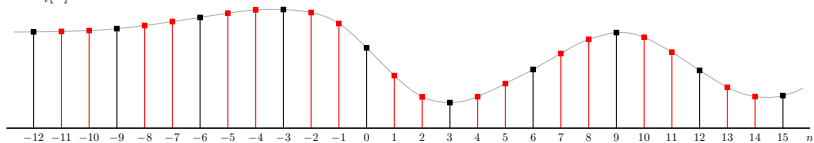


$$x_c[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]$$

$L = 3$



$$x_i[n]$$



Incremento de la frecuencia de muestreo

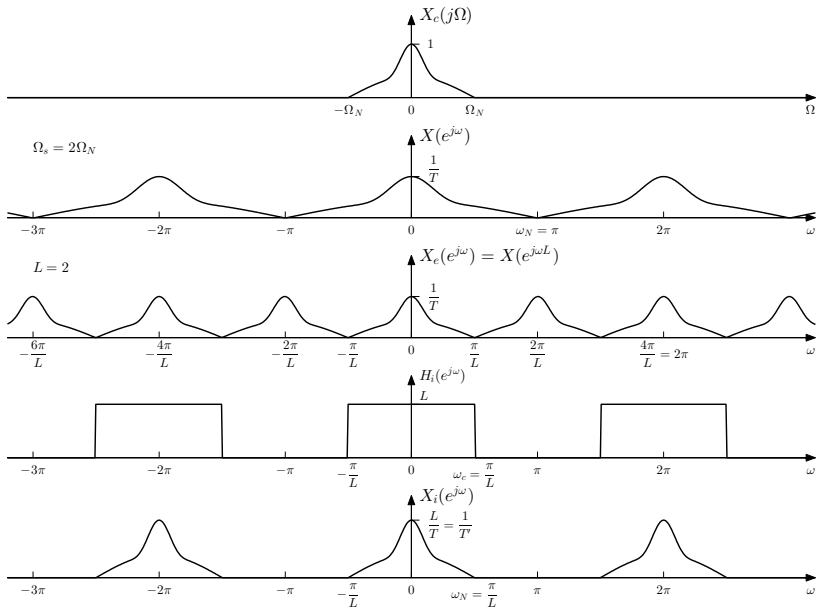
Análisis en el dominio de la frecuencia

- ▶ La operación del sistema interpolador es mas sencilla de interpretar en el dominio de la frecuencia.
- ▶ La transformada de Fourier de la salida de $x_e[n]$ es

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - kL] e^{-j\omega n} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} \\ &= X(e^{j\omega L}). \end{aligned}$$

- ▶ La transformada de Fourier de la salida del expansor es una versión escalada de la transformada de Fourier de la entrada, es decir, ω es reemplazado por ωL . Esto es una compresión por un factor de L del eje de frecuencia.

Incremento de la frecuencia de muestreo



Incremento de la frecuencia de muestreo

Análisis en el dominio de la frecuencia

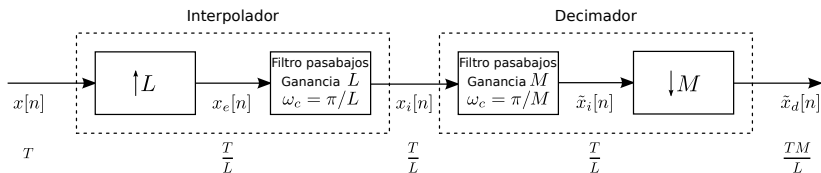
- ▶ En el ejemplo mostrado en la figura anterior,
 - ▶ Se considera una señal discreta con espectro $X(e^{j\omega})$ que proviene del muestreo de una señal continua $X_c(j\omega)$ de ancho de banda ω_N .
 - ▶ La frecuencia de muestreo es $\omega_s = 2\omega_N$, y por lo tanto, se cumplen las condiciones del teorema de muestro y no se produce aliasing.
 - ▶ De esta forma, la señal discreta es de banda limitada con ancho de banda

$$\omega_N = \pi.$$

- ▶ La señal discreta se sobremuestra con $L = 2$.
 - ▶ El espectro de $X_e(e^{j\omega})$ es una versión comprimida en frecuencia un factor L del espectro de la señal original $X(e^{j\omega})$.
 - ▶ El espectro de la señal sobremuestreada se construye a partir del espectro de $X_e(e^{j\omega})$ mediante el escalado en amplitud de $1/T$ a $1/T'$ y eliminando todas las copias de $X_c(j\omega)$ excepto las que están en múltiplos enteros de 2π , para lo cual se necesita un pasabajos de ganancia L y frecuencia de corte π/L .
- ▶ El proceso en el dominio de la frecuencia muestra que si $x[n] = x_c(nT)$ fue obtenida sin aliasing, se cumple que $x_i[n] = x_c(nT')$.

Cambio arbitrario de la frecuencia de muestreo

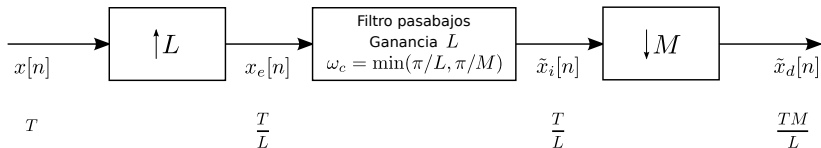
- ▶ Mediante un decimador se reduce la frecuencia de muestreo por un factor entero y mediante el interpolador se incrementa la frecuencia de muestreo por un factor entero.
- ▶ Combinando los procesos de decimación e interpolación, es posible cambiar la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario (racional).



- ▶ Si $M > L$, el resultado es un incremento en el periodo de muestreo (reducción de la frecuencia de muestreo), y si $M < L$, se cumple lo opuesto.

Cambio arbitrario de la frecuencia de muestreo

- ▶ Como los sistemas están en cascada, los filtros pasabajos se pueden combinar en un único filtro pasabajos de ganancia L y frecuencia de corte el mínimo de π/L y π/M .



Apéndice

En este apéndice se incluyen algunas operaciones de señales en tiempo continuo necesarias para el desarrollo del tema tratado en la clase. Los detalles pueden encontrarse en el libro [Oppenheim et al., 1996].

Convolución de señales de tiempo continuo

Definición:

$$\begin{aligned}x(t) * h(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{conmutatividad})\end{aligned}$$

Transformada continua de Fourier

Definiciones:

Transformada de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Apéndice

Propiedades de la transformada continua de Fourier

Sean los siguientes pares de transformadas de Fourier,

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) \quad \text{y} \quad g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

Teorema de la convolución

- ▶ Si

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = f(t) * g(t)$$

- ▶ se cumple que

$$H(j\omega) = F(j\omega)G(j\omega)$$

Teorema de la modulación

- ▶ Si

$$h(t) = f(t)g(t)$$

- ▶ se cumple que

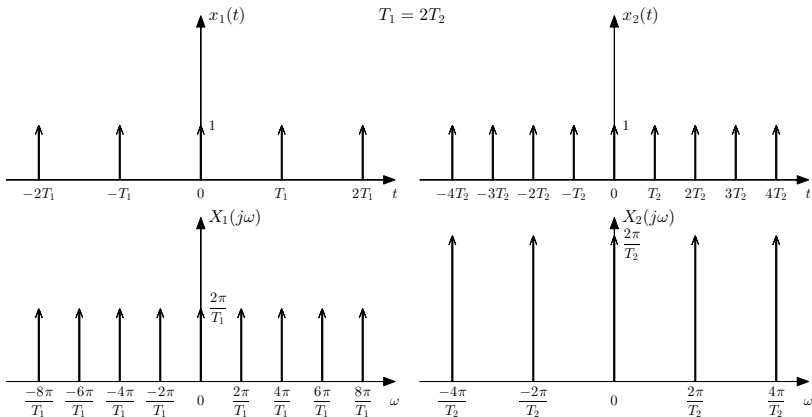
$$H(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(j\omega) * G(j\omega)]$$

Apéndice

Ejemplos de transformadas de Fourier útiles

Tren de impulsos periódico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad (10)$$



Apéndice

Demostración (no va, se incluye solo por completitud):

- Considérese la señal cuyo espectro consiste en una combinación lineal de impulsos armónicos,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (11)$$

- La señal en el tiempo se obtiene mediante la antitransformada de Fourier,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Apéndice

- ▶ El resultado corresponde a la serie de Fourier de una señal periódica de frecuencia $\omega_0 = 2\pi/T$.
- ▶ Este resultado es general e indica que la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos armónico donde el área del impulso de frecuencia $k\omega_0$ es a_k , el coeficiente k -ésimo de la serie de Fourier.
- ▶ Los coeficientes a_k de la serie de Fourier de una señal periódica de periodo T están dados por

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- ▶ En el caso del tren de pulsos periódico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

los coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T}.$$

Apéndice

- ▶ Sustituyendo este resultado en la ecuación 10 se llega a que la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Señal sinusoidal

$$x(t) = \cos \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (12)$$

Demostración

- ▶ Como la señal es periódica, para calcular la transformada de Fourier se procede como en el caso anterior usando el espectro que consiste en un tren de impulsos periódico (ecuación 11).

Apéndice

- ▶ Para calcular los coeficientes a_k de la serie Fourier, se compara la señal con la representación de Fourier,

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}.\end{aligned}$$

Definición de serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

- ▶ Se concluye que

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_k = 0 \quad \forall k \neq 1, -1$$

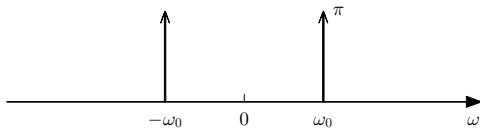
y sustituyendo en la ecuación 11 se obtiene el resultado indicado.

- ▶ Procediendo de forma análoga, se obtiene que

$$x(t) = \sin \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) \quad (13)$$

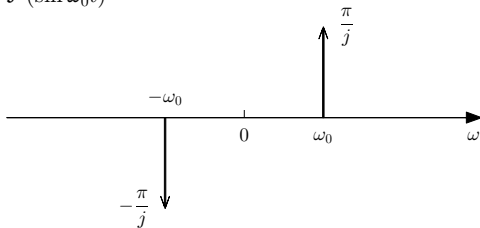
Apéndice

Transformada continua de Fourier de las funciones coseno y seno



$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t)$

$\mathcal{F}(\sin \omega_0 t)$



Apéndice

Antitransformada de Fourier de pulso rectangular

- ▶ Se considera la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

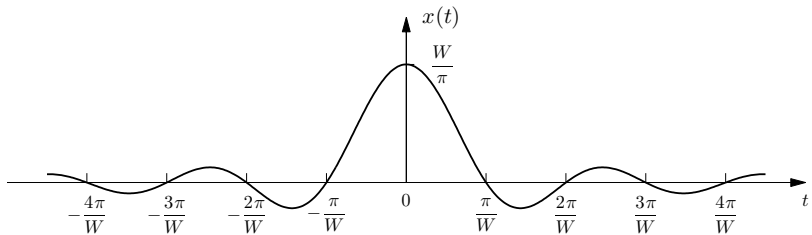
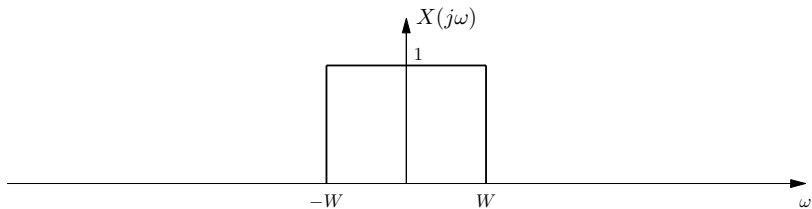
- ▶ La señal $x(t)$ se determina empleando la transformada inversa de Fourier,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right|_{-W}^W \\ &= \frac{1}{\pi t} \frac{e^{jWt} - e^{-jWt}}{2j} \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que

$$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (14)$$

Apéndice



Referencias I



Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).
Discrete-Time Signal Processing, chapter 4.
Prentice Hall, 2nd edition.



Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., and Hamid, S. (1996).
Signals and Systems.
Prentice Hall, 2nd edition.