

Análisis de Fourier de Señales Periódicas

Señales y Sistemas
Juan Cardelino
juanc@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Litoral Norte
Sede Paysandú
Licenciatura en Ingeniería Biológica

Curso 2016

Outline for section 1

Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Esquema

- ▶ Representación de Señales Aperiódicas: Transformada Continua de Fourier
- ▶ Ejemplos
- ▶ La transformada de Fourier para señales periódicas
- ▶ Propiedades
- ▶ Aplicaciones y extensiones: Filtrado, Modulación, Análisis Tiempo Frecuencia

Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

Introducción

Introducción

- ▶ Idea: Señal aperiódica: periódica de período infinito



$$w_k = \frac{2\pi k}{T} \rightarrow 0$$

Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

Definicion

Notación

- ▶ Análisis:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jw t} dt \quad (1)$$

- ▶ Síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jw t} dw \quad (2)$$



$$X(jw) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$



$$X(jw) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(t)$$

Propiedades

- ▶ Linealidad
- ▶ Desplazamiento en el tiempo
- ▶ Conjugación y simetría conjugada
- ▶ Diferenciación e integración
- ▶ Escalamiento de tiempo y frecuencia
- ▶ Dualidad
- ▶ Parseval
- ▶ Convolución
- ▶ Multiplicación

Outline for section 2

Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Esquema

- ▶ Representación de Señales Aperiódicas: Transformada Discreta de Fourier
- ▶ Ejemplos
- ▶ Convergencia
- ▶ La transformada de Fourier para señales periódicas
- ▶ Propiedades
- ▶ Aplicaciones: Descripción de sistemas LTI, Filtrado, modulación

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Definición

- ▶ Ecuación de síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{jw}) e^{jwn} dw \quad (3)$$

- ▶ Ecuación de análisis:

$$X(e^{jw}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn} \quad (4)$$

Notación

$$X(e^{jw}) = \mathcal{F} \{x[n]\}$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw})$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Convergencia

► Condición:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (5)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Reconstrucción parcial

Reconstrucción parcial

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(e^{jw}) e^{jwn} dw \quad (6)$$

$$\lim_{W \rightarrow 2\pi} \tilde{x}[n] = x[n] \quad (7)$$

Obs: no existe fenómeno de Gibbs

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Señales Periódicas

- ▶ Reconstrucción parcial:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (8)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Propiedades

- ▶ Periodicidad
- ▶ Linealidad
- ▶ Desplazamiento en el tiempo
- ▶ Conjugación y simetría conjugada
- ▶ Diferenciación y acumulación
- ▶ Escalamiento de tiempo y frecuencia
- ▶ Dualidad
- ▶ Parseval
- ▶ Convolución
- ▶ Multiplicación

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Periodicidad

Periodicidad

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = X(e^{jw}) \quad (9)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Diferenciación

Diferenciación

$$y[n] = x[n] - x[n - 1] \xrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \quad (10)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Acumulación

Acumulación

$$y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) \quad (11)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 x[n-k] \quad (12)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \quad (13)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Dualidad

TABLA 5.3 RESUMEN DE EXPRESIONES DE LA SERIE Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

	Tiempo continuo		Tiempo discreto	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Serie de Fourier	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ tiempo continuo periódica en tiempo	$a_k = \frac{1}{T_d T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ frecuencia discreta, aperiódica en frecuencia	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ tiempo discreto, periódica en tiempo	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ frecuencia discreta, periódica en frecuencia
Transformada de Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ tiempo continuo aperiódica en tiempo	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ frecuencia continua, aperiódica en frecuencia	$x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ tiempo discreto, aperiódica en tiempo	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ frecuencia continua, periódica en frecuencia

Figure: dualidad

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Resumen

- ▶ Deducción de la transformada para tiempo continuo y discreto
- ▶ Las propiedades fundamentales se mantienen (convolución, etc) y son las que permiten estudiar los sistemas LTI
- ▶ La diferencia fundamental es la periodicidad y la dualidad.
- ▶ La serie como caso particular de la transformada
- ▶ Se completó el análisis de todos los casos posibles
- ▶ Pasos:
 - ▶ Desarrollo de la idea
 - ▶ Ejemplos
 - ▶ Propiedades
 - ▶ Aplicaciones: filtrado, modulación, análisis de sistemas

Referencias I