M2T
#7

Fracciones simples

⊛ Factorización en raíces de un polinomio de grado n, $P_n(x)$

$P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n$, A_i coeficientes reales

$P_n(x)$ tiene n raíces $a_1, a_2 \dots a_n$

$\Rightarrow P_n(x)$ se puede escribir como:

$P_n(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)$

⊙ Cuando se tiene algún $a_i = a_j$ con $j \neq i$ $i, j \in 1 \dots n$

se dice que la raíz tiene multiplicidad mayor a 1.

La multiplicidad de una raíz a_i es cuántas veces se repite en $a_1 a_2, a_3 \dots a_n$ $\Rightarrow$

$P_n(x)$ se puede escribir como:

$P_n(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}$, siendo

$a_1, a_2 \dots a_k$ las raíces distintas ($k < n$ siempre) y

$m_1 \dots m_k$ las multiplicidades de cada raíz /

$m_1 + m_2 + m_3 \dots + m_k = n$

Ejemplos:

① $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ grado 3 $\Rightarrow n = 3$

La suma de los coeficientes da cero $\Rightarrow$ (1 es raíz) ⊙

$\Rightarrow$

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2 es raíz doble

⊙ Se deben repasar las maneras de encontrar raíces evidentes.

1 raíz y 2 raíz doble.

$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2(x-1)$ ← si no dice nada está elevado a la 1

$2 + 1 = 3$ multiplicidad de raíz 1 $\Rightarrow$ Las multiplicidades suman el grado del polinomio $(n=3)$

multiplicidad de la raíz 2

(2) $f(x) = x^2 + x + 1$

raíces: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$a_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ $\quad a_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \left(x - \left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$1 + 1 = 2$ (Las multiplicidades suman el grado del polinomio $(n=2)$)

(3) $f(x) = x^2 + 4$ raíz? $x = \pm\sqrt{-4} = \pm i2$

$f(x) = (x - 2i)(x - (-2i))$

Descomposición en fracciones simples de un cociente de polinomios:

Este método es útil cuando se tienen 2 polinomios en un cociente $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ y el grado de $Q(x)$ sea mayor al de $P(x)$.

Ejemplo: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^3 + x^2 + 3}{x^3(x-1)(x^2+1)^2}$

...m de descomposición en fracciones simples

Todo cociente de polinomios puede descomponerse en suma de cocientes, correspondiendo a cada raíz de $Q(x)$, las siguientes fracciones:

⊛ Si a raíz real simple : $\frac{A}{x-a}$

⊛ Raíz real de multiplicidad k, a:

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

⊛ Raíces complejas simples, $a \pm bi$:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

⊛ Raíces complejas con multiplicidad k, $a \pm bi$:

$$\frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{M_2x+N_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{((x-a)^2+b^2)^k}$$

Ejemplo.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}$$

⇒ ① raíces?

$x=1$ raíz de $(x-1)$, simple

$x=-1$ raíz de $(x+1)$, triple

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \underbrace{\frac{A}{(x-1)}}_{\text{(parte 1 del TM)}} + \underbrace{\frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}}_{\text{(parte 2 del TM}}$$

② Quiénes son A, B_1, B_2, B_3?

M2T

+1/10

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}$$

multiplicamos por $(x-1)$:

$$\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)^3} = \frac{A\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} + \frac{B_1(x-1)}{(x+1)} + \frac{B_2(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{B_3(x-1)}{(x+1)^3}$$

$$\frac{1}{(x+1)^3} = A + \frac{B_1(x-1)}{(x+1)} + \frac{B_2(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{B_3(x-1)}{(x+1)^3}$$

en $x = 1$

$$\frac{1}{(1+1)^3} = A + \frac{B_1 . 0}{0+1} + \frac{B_2 . 0}{(0+1)^2} + \frac{B_3\ 0}{(0+1)^3} \Rightarrow A = \frac{1}{2^3}$$

$$\boxed{A = 1/8}$$

volvemos al inicio y multiplicamos por $(x+1)^3$

$$\frac{\cancel{(x+1)^3}}{(x-1)\cancel{(x+1)^3}} = \frac{(x+1)^3}{8(x-1)} + \frac{B_1(x+1)^{\cancel{3}2}}{\cancel{(x+1)}} + \frac{B_2(x+1)^{\cancel{3}}}{(x+1)^2} + \frac{B_3\cancel{(x+1)^3}}{\cancel{(x+1)^3}}$$

$$\frac{1}{(x-1)} = \frac{(x+1)^3}{8(x-1)} + B_1(x+1)^2 + B_2(x+1) + B_3$$

en $x=-1$:

$$\frac{1}{-1-1} = 0 + 0 + 0 + B_3 \Rightarrow \boxed{B_3 = -\frac{1}{2}}$$

volvemos al inicio y multiplicamos por x

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{x}{8(x-1)} + \frac{x B_1}{(x+1)} + \frac{x B_3}{(x+1)^2} - \frac{x}{2(x+1)^3}$$

Si $x \to \infty$
órdenes de infinitos

$$0 = \frac{1}{8} + B_1 + 0 + 0$$

M2T
H11

$\boxed{B_1 = -1/8}$

Volvemos al inicio y evaluamos en $x=0$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2.(x+1)^3}$$

$$\frac{1}{(-1)(1)^3} = \frac{1}{8(-1)} - \frac{1}{8(1)} + \frac{B_2}{(1)^2} - \frac{1}{2(1)^3}$$

$$\frac{1}{-1} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + B_2 - \frac{1}{2}$$

$$-1 = -\frac{2}{8} + B_2 - 1/2 \qquad \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{8} = B_2$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = B_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = -\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^3(x-1)} = \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+1)^3}$$

Ejemplo 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{7x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 6x + 2}{(x+1)^2(x-2)(x^2+1)}$$

raíces: $x = -1$ doble $\quad x = 2$ simple

de $Q(x)$ $\quad x^2 = -1 \quad x = \pm\sqrt{(-1)} \Rightarrow x = \pm i$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)} + \frac{Mx+N}{(x-0)^2+1^2}$$

M2T

H12

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1^2}$$

$\times (x-2)$

$$\frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = A + \frac{B_1(x-2)}{(x+1)} + \frac{B_2(x-2)}{(x+1)} + \frac{(Mx+N)(x-2)}{x^2+1}$$

$x = 2$

$$\frac{7(16)+16-7(4)-12+2}{(3^2)(5)} = A$$

$$\Rightarrow A = \frac{7(12)+4+2}{(9)5} = \frac{84+6}{(9)5} = \frac{90}{45} = 2 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$\times (x+1)^2$

$$\frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A(x+1)^2}{(x-2)} + \frac{B_1(x+1)^2}{(x+1)} + B_2 + \frac{(Mx+N)(x+1)^2}{x^2+1}$$

en $x=-1$

$$\frac{7(-1)^4+2(-1)^3-7(-1)^2-6(-1)+2}{(-1-2)((-1)^2+1)} = B_2$$

$$B_2 = \frac{\cancel{7}-\cancel{2}-\cancel{7}+6+\cancel{2}}{(-3)(2)} = \frac{6}{-6} = -1 \quad \boxed{B_2=-1}$$

$\underline{\underline{x \quad (x^2+1)}}$

$$\frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A(x^2+1)}{(x-2)} + \frac{B_1(x^2+1)}{(x+1)} + \frac{B_2(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$+ Mx + N$$

$\underline{\underline{x = i}}$

$$\frac{7i^4+2i^3-7i^2-6i+2}{(i+1)^2(i-2)} = Mi + N$$

$$\frac{7-2i+7-6i+2}{(i^2+2i+1)(i-2)} = Mi+N = \frac{16-8i}{2i^2-4i}$$

$$\Rightarrow \frac{8(2-i)}{-2-4i} = Mi+N \quad \Rightarrow \frac{\overset{4}{\cancel{8}}(2-i)}{-\cancel{2}(1+2i)} = Mi+N$$

$$-4\frac{(2-i)(1-2i)}{1+2^2} = Mi+N \Rightarrow -4(2-4i-i+2i^2) = 5(Mi+N)$$

$$-4(\cancel{2}-5i-\cancel{2}) = 5Mi+N \quad \Rightarrow \quad 20i = 5Mi+N$$

$$\Rightarrow \boxed{N = 0 \quad M = 4}$$

<u>multiplico por x</u> y $x \longrightarrow \infty$

$$7 = A + B_1 + M \qquad 7-2-4 = \boxed{B_1 = 1}$$