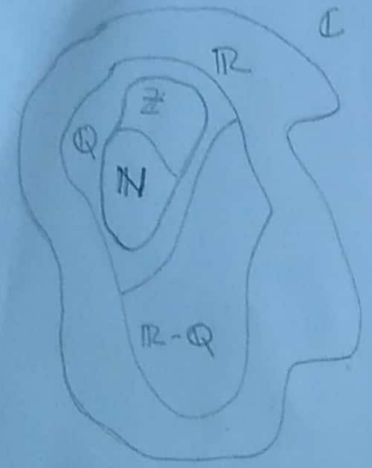
Apuntes 7 - Número complejo

Noción: Se llama número complejo a toda expresión de la forma: $a+bi$, con a y b reales, i es la unidad imaginaria definida por las ecuaciones $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

Observación (Obs): a es la parte real del número y bi es la parte imaginaria.

Representación de los distintos tipos de números



Obs: • Los números ya estudiados anteriormente se encuentran dentro de los números complejos.

• La notación $a+bi$ se denomina binomial

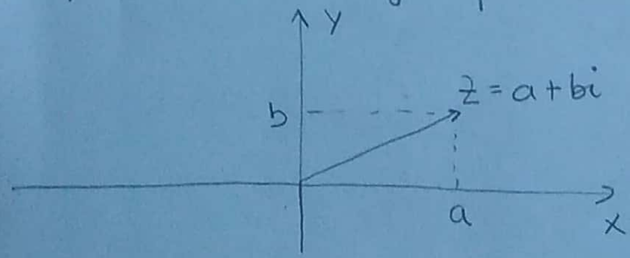
Definición Si $z=a+bi$, $z\in\mathbb{C} \Rightarrow \bar{z}=a-bi$ es el conjugado de z.

Obs: • Si $a=0 \Rightarrow a$ es puramente imaginario $(z=bi)$

• Dos complejos son iguales, $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ si $a_1=a_2$ $b_1=b_2$

• Un complejo $z=a+bi$ es cero si $a=0$ y $b=0$

Representación gráfica



Obs: En el eje Oy se encuentran los imaginarios puros $(a=0)$. En el eje Ox se encuentran los reales $(b=0)$.

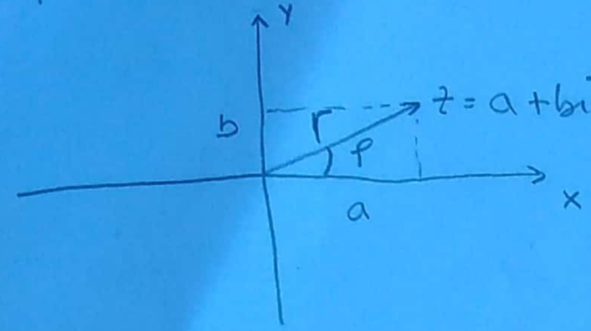
Notación trigonométrica:

Si $z=a+bi \Rightarrow z$ se puede re-escribir como

$z=r\cos\varphi+ir\operatorname{sen}\varphi$ / • $r=\sqrt{a^2+b^2}$, • $\tan\varphi=b/a$, $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

• $r\cos\varphi=a$ $r\operatorname{sen}\varphi=b$

Representación gráfica



$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\,\text{sen}\,\varphi$

Obs: Para la conversión entre notación binomial y trigonométrica se utilizan las ecuaciones trigonométricas (*), están en la página siguiente

Obs: • A r se lo llama módulo y a φ se lo llama argumento.

• El argumento se mide de forma positiva en sentido antihorario.

Operaciones con números complejos.

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow$

Suma:

$z_3 = z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Ejemplo (Ej): $z_1 = 3i + 1$ $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 1 - 2 + i(3+4)$

$\Rightarrow z_3 = -1 + 7i$

Resta

$z_3 = z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)$

Ej: $z_1 = 2i + 2$ $z_2 = -6i$, $z_3 = z_1 - z_2 = 2 - 0 + i(2 - (-6))$

$z_3 = 2 + i(8) = 2 + 8i$

Multiplicación

$z_3 = z_1 . z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i$

$z_3 = a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_1 b_2 \underset{i^2 = -1}{\underbrace{i^2}} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Ej: $z_1 = 4 - i$ $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = z_1 . z_2 = (4 - i)(2 + 3i) \Rightarrow$

$z_3 = 4.2 + 4(3i) - i(2) - i(3i) = 8 + 12i - 2i - 3i^2 = 8 + 3 + i(12 - 2)$

$z_3 = 11 + 10i$

Propiedad: $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi \Rightarrow z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$. Es decir la multiplicación de un complejo por su conjugado resulta en el módulo al cuadrado

Ej: $z = 5i+6 \Rightarrow \bar{z} = 6-5i \Rightarrow z\bar{z} = (5i+6)(6-5i)$

$z\bar{z} = 5i(6) - 25i^2 + 36 - 30i = \cancel{30i} + 25 + 36 - \cancel{30i} = 6^2+5^2 = a^2+b^2$

División

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{a_2^2+b_2^2}$$

Ej: $z_1 = 2-3i$ $z_2 = 4-i$ $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \Rightarrow$

$$z_3 = \frac{2(4)+2i-3i(4)-3i^2}{4(4)+\cancel{4i}-\cancel{4i}-i^2} = \frac{8+2i-12i+3}{16+1} = \frac{11-10i}{17}$$

$$z_3 = \frac{11}{17} - \frac{10i}{17}$$

Notación polar (exponencial):

Para deducir la notación exponencial son necesarias las fórmulas de Euler.⊛2 Tomando la notación trigonométrica:

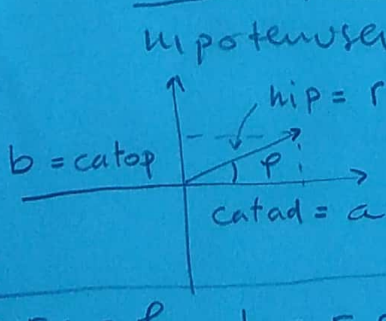
$$z = r\cos\varphi + i r\,\mathrm{sen}\,\varphi = r\left[\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right] + \cancel{i}r\left[\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2\cancel{i}}\right] \rightarrow$$

$$z = \frac{r}{2}e^{i\varphi} + \cancel{\frac{r}{2}e^{-i\varphi}} + \frac{re^{i\varphi}}{2} - \cancel{\frac{re^{-i\varphi}}{2}} = re^{i\varphi}$$

$\Rightarrow \boxed{z = re^{i\varphi}}$ $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

⊛1 Ecuaciones trigonométricas: $\cos\varphi = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

$\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{\text{cateto opcesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\tan\varphi = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cat adyacente}}$



$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{b}{a}}$

$\boxed{a = r\cos\varphi,\ b = r\,\mathrm{sen}\,\varphi}$

⊛2 Fórmulas de Euler:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

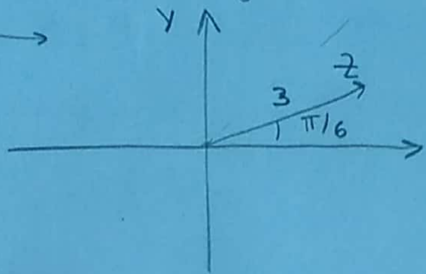
Obs: Es notación exponencial se utiliza para multiplicar y dividir más fácil

Herramientas para estudiar los complejos en notación polar.

- Cuando se trabaja con números complejos los ángulos se expresan en radianes no en grados.

360 grados $\longrightarrow$ 2π radianes
180 grados $\longrightarrow$ π radianes
90 grados — $\pi/2$ radianes

Ej: $z = 3e^{i\pi/6} \longrightarrow$



$\pi/6$ radianes son 30 grados

- Para poder ubicar los complejos en su representación gráfica y realizar la conversión desde la notación binomial hacia la notación exponencial son útiles:

Círculo trigonométrico

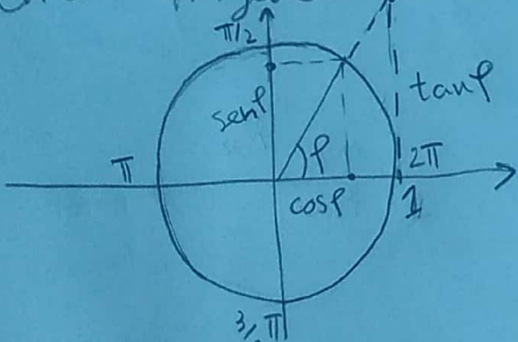


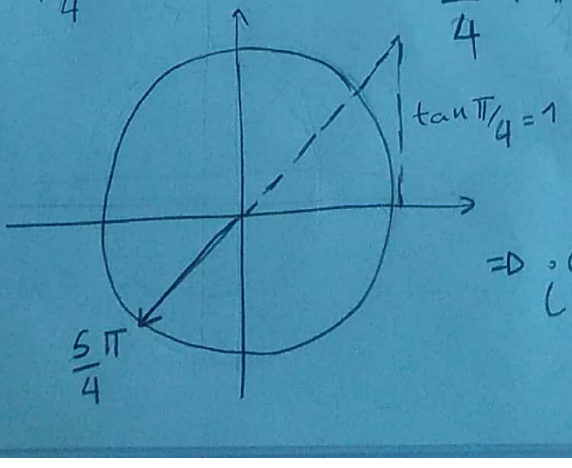
Tabla de senos y cosenos

	sen φ	cos φ	tan φ
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$	0
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$	$\nexists$

Ej: Si $z = 2+2i \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(1)$

¿qué ángulo tiene tangente 1? $\rightarrow$ Tabla de sen y cos $\Rightarrow$

$\pi/4 = \varphi$ PERO $\dfrac{\pi}{4} + \pi$ también tiene $\tan\varphi = 1$ porque



- Se prolonga el ángulo hasta cruzarse con la línea tangente al círculo del lado derecho

$\Rightarrow$ ¿Cómo sé si el ángulo de $2+2i$ es $\pi/4$ o $\frac{5}{4}\pi$?

La diferencia es que $z = 2+2i$ se encuentra en el primer cuadrante, entonces el ángulo es $\pi/4$. Para que fuera $\frac{5}{4}\pi$ tiene que estar en tercer cuadrante $\Rightarrow$ z sería $z = -2-2i$

En resumen: si $z_1 = 2+2i \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \varphi_1$ es $\pi/4$ o $\frac{5}{4}\pi$

Como $a_1 > 0$, $b_1 > 0 \Rightarrow \varphi = \pi/4$

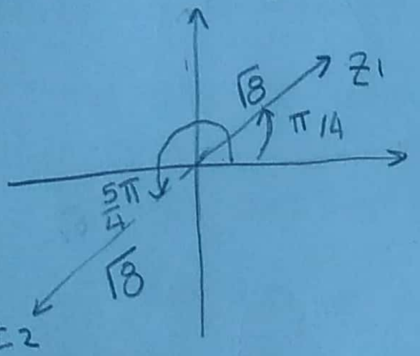
$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. $\Rightarrow z_1 = \sqrt{8}\, e^{i\pi/4}$

- Si $z_2 = -2-2i \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2}\right) = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \varphi_2$ es $\pi/4$ o $\frac{5}{4}\pi$

Como $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$

$r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \Rightarrow z_2 = \sqrt{8}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$

Representación gráfica



Multiplicación y División (notación polar)

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $\quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_3 = z_1 . z_2 = r_1 . r_2\, e^{i\varphi_1} . e^{i\varphi_2}$

$\Rightarrow z_3 = r_1 . r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

↓
igual base
distinto exponente

La multiplicación es la suma de argumentos y multiplicación de módulos

$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 . e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1) - i\varphi_2} \Rightarrow z_4 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Ej: Si $z_1 = 3e^{i\pi/2}$, $z_2 = 4e^{-i\pi/4} \Rightarrow z_3 = z_1 . z_2 = 4(3) e^{i\pi/2 - i\pi/4}$

$\Rightarrow \boxed{z_3 = 12\, e^{i\pi/4}}$ y $z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4} e^{i\pi/2 - (-i\pi/4)} = \frac{3}{4} e^{i(\pi/2 + \pi/4)}$

$\boxed{z_4 = \frac{3}{4} e^{i.3\pi/4}}$

Propiedades de los números complejos

$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow$ ① $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

② $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$

③ $z = \overline{z} \leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

④ $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

⑤ $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$

⑥ $Re(z) \leq |z|$, $Im(z) \leq |z|$

⑦ $|z|^2 = z.\overline{z}$

⑧ $|z+w| \leq |z| + |w|$ Desigualdad Triangular

Estudio de las raíces de polinomios de grado n

Teorema (Tm): Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas).

Tm Si un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tiene la raíz compleja $a+bi \Rightarrow$ también tiene la raíz compleja $a-bi$ ($\overline{z}$ conjugado).

Raíces de un polinomio de grado 2 $P_2(x)$

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$. ¿cuáles son sus raíces? $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2a}$.

- Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow P_2(x)$ tiene dos raíces reales
- Si $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow P_2(x)$ tiene una raíz real doble
- Si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow P_2(x)$ no tiene raíces reales. Tiene dos raíces complejas conjugadas

Ej: $P_2(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(-1)(4)}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-2 \pm i2}{2}$

$\Rightarrow x = -1 \pm i \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{array}\right\}$ raíces complejas conjugadas

Obs Un polinomio de grado 2 <u>no</u> puede tener una raíz compleja y una real. Si tiene una raíz compleja, también tiene su conjugada

Raíces de un polinomio grado 3, $P_3(x)$

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ¿cuáles son sus raíces?

- Tiene tres raíces reales distintas
- Tiene una raíz real simple y una raíz real doble
- Tiene una raíz real simple y dos raíces complejas conjugadas

Ej $P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 3x - 10$

$\boxed{x_1 = 5}$ es raíz $P_3(5) = 5^3 - 4(5)^2 - 3(5) - 10 = 125 - 4(25) - 15 - 10$

$P_3(5) = 125 - 100 - 25 = 0$ ✓ con una raíz conocida se puede aplicar Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -3 & -10 \\ 5 & & 5 & 5 & 10 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow P_3(x) = (x-5)(\underbrace{x^2 + x + 2}_{\text{Báscara:}})$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{7}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad x_3 = -\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}}$

Obs Un polinomio de grado 3 __no__ puede tener tres raíces complejas o una raíz compleja y dos reales.