H1

Apuntes 6 - Espacios Vectoriales

Definición (Def): Un espacio vectorial (EV) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ⊛1 es una cuádrupla ordenada $\{V, \mathbb{K}, +, \cdot\}$ que cumple:

① Un conjunto $V \neq \emptyset$, cuyo elementos se llaman vectores

② El cuerpo $\mathbb{K}$ cuyos elementos se llaman escalares

③ Una operación llamada suma de vectores $+ : V \times V \longrightarrow V$

④ Una operación llamada multiplicación por escalares $\cdot : V \times V \longrightarrow V$

Se deben cumplir las siguientes propiedades ⊛2:

Suma) Asociativa $(u+v)+w = u+(v+w) \;\forall u,v,w \in V$

Suma) Conmutativa $u+v = v+u \;\forall u,v \in V$

Suma) Neutro $\exists \vec{O} \in V / \vec{O}+u = u \;\forall u \in V$

Suma) Opuesto Para cada $u \in V \;\exists -u / u+(-u) = \vec{O}$

Multiplicación) Asociativa $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \;\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$

Multiplicación) Neutro $1u = u \;\forall u \in V$ 1 unidad de $\mathbb{K}$.

Multiplicación) Distributiva1 $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \;\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u,v \in V$

Multiplicación) Distributiva2 $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \;\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$

Ejemplo (Ej) 1: $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}$ $\mathbb{R}$, suma y mutiplicación con escalares usual entre vectores de $\mathbb{R}^3$. $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

Sean $v_1 = (a1, a2, a3)$, $v2 = (b1, b2, b3)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $(a1, a2, a3) + (b1, b2, b3) = (a1+b1, a2+b2, a3+b3)$
- $\lambda(a1, a2, a3) = (\lambda a1, \lambda a2, \lambda a3)$

Ej 2: V/ sea el conjunto de todos los polinomios de una variable con coeficientes reales, $V = P$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la suma usual y multiplicación por un escalar entre polinomios. $\{P, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

⊛1 El cuerpo más usado en el curso son los reales pero podría ser otro conjunto de números

⊛2 Las propiedades son las mismas que para matrices y vectores de $\mathbb{R}^n$

Se muestra una suma y multiplicación en particular! H2

Sea $p1(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ y $p2(x) = x^2 - 2x + 1$, $\lambda = -5$

$p1, p2 \in P$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$p1(x) + p2(x) = x^3 - x^2 + x - 4$, $\lambda p1(x) = -5x^3 + 10x^2 - 15x + 25$

Ej 3: V/ sea el conjunto de todas las funciones $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con operaciones usuales de suma y multiplicación por un número en funciones. $\{F, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

Se muestra una suma y multiplicación en particular:

Sea $f(x) = e^x + 1$, $g(x) = x - 7$ y $\lambda = -2 \Rightarrow$

$f(x) + g(x) = e^x + x - 6$, $\lambda f(x) = -2e^x - 2$

Ej 4: $V = \{\vec{0}\}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la suma y multiplicación por escalar definidas como: $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ y $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Proposición (Pp): • $0 \in \mathbb{K}$, $\vec{0} \in V \Rightarrow 0 . u = \vec{0}$ $\forall u \in V$.

• $\vec{0} \in V \Rightarrow \lambda \vec{0} = \vec{0}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

• $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall v \in V \Rightarrow \alpha u = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ o/y $u = \vec{0}$

• $-1 \in \mathbb{K}$, $(-1) \cdot u = -u$ $\forall u \in V$

Subespacio vectorial

Def Sea un EV $\{V, \mathbb{K}, +, \cdot\}$ y $W \neq \emptyset$ un subconjunto de V ($W \subset V$).

W es un subespacio vectorial de V (SEV) si:

① $w1 + w2 \in W$ $\forall w1, w2 \in W$

② $\lambda w \in W$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall w \in W$

Observación (Obs): • Un subespacio W es un subconjunto de V no vacío cerrado frente a la suma y multiplicación por escalares.

• Si W es un SEV $\Rightarrow \vec{0} \in W$

Ej 1: Los subespacios triviales, $W = \{\vec{0}\}$ y $W = V$.

Ej 2: Sea un plano que pasa por el origen $\Pi)\ ax+by+cz=0$ es un subespacio de $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

- $\vec{0} \in \Pi$? $\vec{0}=(0,0,0) \Rightarrow a0+b.0+c0=0 \Rightarrow$ Se cumple la ecuación $(\Pi \neq \emptyset)$ ✓

- Sean $P_1, P_2 \in \Pi \Rightarrow P_1+P_2 \in \Pi$?

$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, se cumple $ax_1+by_1+cz_1=0$ y $ax_2+by_2+cz_2=0$.

$P_1+P_2=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \Rightarrow a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) \overset{?}{=} 0$

Se realizan cálculos: $ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2 \overset{?}{=} 0$

$\underbrace{ax_1+by_1+cz_1+ax_2+bx_2+cz_2=0+0}_{\text{Como } P_1 \text{ y } P_2 \in \Pi}=0 \Rightarrow P_1+P_2 \in \Pi$ ✓

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P_1 \in \Pi \Rightarrow \lambda P_1 \in \Pi$?

$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ se cumple $ax_1+by_1+cz_1=0$

$\lambda P_1=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \Rightarrow a(\lambda x_1)+b(\lambda y_1)+c(\lambda z_1) \overset{?}{=} 0$

Se realizan cálculos $\underbrace{\lambda(ax_1+by_1+cz_1)=\lambda 0}_{P_1 \in \Pi}=0 \Rightarrow \lambda P_1 \in \Pi$

Ej 3: Sea una recta que pasa por el origen $r)\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ dx+ey+fz=0 \end{cases}$ (*)1 es un subespacio de $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

- $\vec{0} \in r$? $\vec{0}=(0,0,0)$ $\begin{cases} a.0+b.0+c0=0 ✓ \\ d.0+e.0+f.0=0 ✓ \end{cases}$ Se cumplen las dos ecs $\Rightarrow$ $0 \in r)$

(*)1 Para demostrar que es un subespacio es útil ver a la recta como intersección de planos. En particular si se define $X=(x,y,z)$ como un punto génerico de $r)$ y $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ la matriz con los coeficientes de los planos. Entonces la intersección se transforma en una ecuación matricial: $AX=\vec{0}\ \forall X \in r)$. Si un punto pertenece a $r \Rightarrow$ se cumple $AX=\vec{0}$

- Sean $x_1, x_2 \in r) \Rightarrow x_1 + x_2 \in r)$?

$x_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $x_2 = (x_2, y_2, z_2)$, se cumple $Ax_1 = \vec{0}$ y $Ax_2 = \vec{0}$.

$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \Rightarrow A(x_1 + x_2) \overset{?}{=} \vec{0}$

Distributiva de matrices $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \underset{\substack{\text{Como } x_1 \text{ y} \\ x_2 \in r)}}{=} \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ ✓

$\Rightarrow x_1 + x_2 \in r$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in r) \Rightarrow \lambda x_1 \in r)$?

$x_1 = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow$ se cumple $Ax_1 = \vec{0}$

$\lambda x_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \Rightarrow A(\lambda x_1) \overset{?}{=} \vec{0}$

Asociativa de matrices $A(\lambda x_1) = \lambda(Ax_1) \underset{x_1 \in r)}{=} \lambda . \vec{0} = \vec{0}$ ✓

$\Rightarrow \lambda x_1 \in r)$

Ej 4: Si $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_3 = 0\}$ W es SEV de $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

- $\vec{0} \in W$? $\vec{0} = (0,0,0)$ cumple que $a_3 = 0 \Rightarrow \vec{0} \in W$
- Si $w_1, w_2 \in W$ $w_1 + w_2 \in W$?

Sea $w_1 = (a_1, a_2, 0)$, $w_2 = (b_1, b_2, 0) \Rightarrow w_1 + w_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0)$

como su tercera componente es cero $\Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w_1 \in W \Rightarrow \lambda w_1 \in W$?

Si $w_1 = (a_1, a_2, 0) \Rightarrow \lambda w_1 = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda 0) = (\lambda a_1, \lambda a_2, 0)$

como su tercera componente es cero $\Rightarrow \lambda w_1 \in W$.

Ej 5: Sea W / es el conjunto de las funciones continuas definidas en un intervalo $[a,b] \Rightarrow W = C[a,b]$; W es SEV de $\{\mathcal{F}, \mathbb{R}, +, \cdot\}$.

Subespacio generado e independencia lineal

Def Sea V EV, $v_1, v_2 \dots v_n \in V$. v es combinación lineal de $v_1, v_2 \dots v_n$ si $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n /\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

Obs. Si $A \neq \emptyset$, $A \subset V \Rightarrow [A]$ es el conjunto de <u>todas</u> las combinaciones lineales de A.

Teorema (TM): Sea V EV, $A \neq \emptyset$, $A \subset V \Rightarrow [A]$ es subespacio de V y se llama subespacio generado por A.

Def Sea V EV y $S \subset V$ SEV, se dice que A, $A \subset S$ es generador de S si $[A] = S$. Es decir cualquier elemento de S es combinación lineal de A. La notación es $A \xrightarrow{g} S$.

Ej 1: Sea $V = \mathbb{R}^3$, ¿$A = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$?

Si $v \in \mathbb{R}^3$ para que $A \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ v tiene que ser CL de $A \Rightarrow$

$v = (a,b,c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ v vector genérico de $\mathbb{R}^3$

$(a,b,c) \overset{?}{=} \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) \Rightarrow (a,b,c) \overset{?}{=} (\lambda_1,0,0) + (0,\lambda_2,0)$

$\Rightarrow (a,b,c) \overset{?}{=} (\lambda_1, \lambda_2, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda_1 \\ b = \lambda_2 \\ c = 0 \end{cases}$ Como la tercera componente no es libre y se fuerza a $0 \Rightarrow A$ no puede generar a todo $\mathbb{R}^3$

Ej 2: Sea $V = \mathcal{M}_{2\times2}$ y $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times2} : A = A^t\}$ subespacio de matrices simétricas, determinar $A \xrightarrow{g} S$

Si $M \in \mathcal{M}_{2\times2} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si además $M = M^t \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

M se puede escribir como $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Como $a,b,c \in \mathbb{R}$ M cumple la definición de CL. M es CL de $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = A$, $A \xrightarrow{g} S$, A genera a S subespacio de matrices simétricas de 2×2

Def Sea V EV, $A = \{v_1, v_2 \dots v_n\} \subset V$. El conjunto es linealmente independiente si dados $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Ej 1: $v \in V$, $v \neq \vec{0}$ $A = \{v\}$ es LI.

Ej 2: $\vec{0} \in V$, $A = \{\vec{0}\}$ es LD

Ej 3: $A = \{\vec{0}, v_1, v_2 \dots v_n\} \subset V$, A es LD

Ej 4: Sea $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subset P_2$ (polinomios de grado 2 o menor)

$q_1(x) = x+1$ $q_2(x) = x^2+x-1$ $q_3(x) = x^2+2x$, $q_4(x) = x^2-2$

es LI o LD? $\Rightarrow \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+x-1) + \lambda_3(x^2+2x) + \lambda_4(x^2-2) = 0$

$\lambda_1 x + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_2 + \lambda_3 x^2 + \lambda_3(2x) + \lambda_4 x^2 - 2\lambda_4 = 0$

$x^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + x(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) + \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0$

Cada grado representa una ecuación para que todo el miembro izquierdo sea cero $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Si se resuelve el sistema $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_3$ $\lambda_2 = -(\lambda_3 + \lambda_4)$ como es SCI y la solución no es sólo la trivial $\Rightarrow$ A es LD.

Base de EV

Def Sea V EV y $A = \{v_1, v_2 \dots v_n\} \subset V$. A es base de $V \Leftrightarrow$

- $A \xrightarrow{g} V$
- A es LI

Se denota $A \xrightarrow{b} V$

Ej 1: Sea $V = \mathbb{R}^3$ $A = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $A \xrightarrow{b} V$?

- LI? $\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = \vec{0}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow A$ es LI

• $A \xrightarrow{g} V$? $V \in \mathbb{R}^3$ genérico, $V = (a, b, c)$ es CL de A? H7

$$(a, b, c) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1)$$

$$(a, b, c) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda_1 \\ b = \lambda_1 + \lambda_2 \\ c = \lambda_3 \end{cases}$$

Es claro que a y c son libres

pero b depende de a $b = a + \lambda_2$ pero como λ_2 es libre se ajusta para que b sea libre $\Rightarrow (a, b, c)$ se genera con A

$A \xrightarrow{g} V \Rightarrow A \xrightarrow{b} V$.

Def Sea V EV, si una base de V tiene n elementos $\Rightarrow V$ tiene dimensión n, $\dim V = n$.

Obs Todas las bases de un mismo V, tienen igual cantidad de elementos

Ej 1 Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{g} S$, siendo S las matrices simétricas de 2×2. También se puede demostrar que es LI $\Rightarrow A \xrightarrow{b} S \Rightarrow \dim S = 3$

Ej 2 Sea $A = \{(1, 1, 0)\ (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$.