Apuntes 6 M2T H1

→ Espacios Vectoriales

⊛ Definición Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (por ejemplo los $\mathbb{R}$, reales) es una cuádrupla ordenada $\{V, \mathbb{K}, +, \cdot\}$ que tiene:

① Un conjunto $V \neq \emptyset$, cuyos elementos se llama lán vectores.

② El cuerpo $\mathbb{K}$, cuyos elementos se llamarán escalares.

③ Una operación llamada suma de vectores $+ : V \times V \longrightarrow V$

④ Una operación llamada multiplicación por un escalar vector $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

Se deben cumplir las siguientes propiedades ⊛:

S1) Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u, v, w \in W$

S2) Conmutativa: $u+v = v+u \quad \forall v, w \in V$

S3) Neutro: $\exists$ un elemento $\vec{O} \in V / \vec{O} + u = u + \vec{O} = u$

S4) Opuesto: Para cada vector $u \in V \ \exists -u / \quad \forall u \in V$
$u + (-u) = \vec{O}$

M1) $\alpha \cdot (\beta u) = (\alpha\beta) u \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad u \in V$

M2) $1 . u = u \quad \forall u \in V$ 1 unidad del $\mathbb{K}$.

M3) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \alpha \in \mathbb{K}, \ u, v \in V$

M4) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ u \in V$

⊛ Observar que son muy similares a las de objetos matemáticos ya estudiados.

M2T
H2

Ejemplos de espacios vectoriales

① $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se definen las operaciones + y · como:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v \in \mathbb{R}^3$$

② Sea P el conjunto de todos los polinomios de una variable con coeficientes reales. Dado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la suma usual de polinomios y la multiplicación de un número por un polinomio, $\{P, \mathbb{R}, +, \cdot\}$

Ejemplo de suma de polinomios:

$p_1(x) = 3x^2 + x - 2 \qquad p_2(x) = -4x^2 + 2x - 1$

$p_1(x) + p_2(x) = (3-4)x^2 + (1+2)x + (-2-1)$

$\Rightarrow p_1 + p_2 = -x^2 + 3x - 3$

Ejemplo de multiplicación por escalar:

$\lambda = 4$, $p(x) = x^4 + 1 \quad \lambda p(x) = 4x^4 + 4$

③ El conjunto de todas las funciones $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con operaciones usuales de suma y multiplicación por un número de funciones:

$$f + g = h \ / \ h(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in [a,b]$$

$$\lambda f = k \ / \ k(x) = \lambda f(x) \ \forall x \in [a,b]$$

Ej. de suma de funciones:

$f(x) = e^x + 1 \qquad g(x) = x + 7 \Rightarrow f + g = e^x + x + 8$

Ej. de multiplicación de función por escalar:

$\lambda = -2 \quad f(x) = \cos(x) \quad \lambda f(x) = -2\cos(x)$

El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n en una variable (P_n), $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y la suma y la multiplicación como en el ejemplo 2.

⑤ El conjunto $\{\vec{0}\}$ es un espacio vectorial dado $\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ y $\alpha\vec{0}=\vec{0}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Proposición:
- $0.u = \vec{0}$ $\forall u \in V$
  cero escalar, cero vector
- $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
- Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $u \in V \Rightarrow \alpha u=\vec{0}$ si sólo si $\alpha=0$ o/y $\vec{u}=\vec{0}$.
- $(-1).v=-v$ $\forall v \in V$

→ Subespacio

⊛ Definición: Sea $\{V, \mathbb{K}, \cdot, +\}$ un espacio vectorial y $W \neq \emptyset$ un subconjunto no vacío de V. Diremos que W es un subespacio de V si se cumple:

a) $w_1+w_2 \in W$ $\forall w_1 \in W, w_2 \in W$

b) $\lambda w \in W$ $\forall w \in W, \lambda \in \mathbb{K}$

Es decir un subespacio de un espacio vectorial es un conjunto no vacío "cerrado" frente a la suma y a la multiplicación por escalares.

Observación si W es subespacio $\vec{0} \in W$. → NO es la definición

Ejemplos de subespacios vectoriales

① subespacios triviales: uno es $W=\{\vec{0}\}$ y otro es $W=V$.

Sea Π un plano del espacio por el origen.

$\Pi: ax+by+cz+d=0$

Π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En efecto $\Pi \neq \emptyset$ porque $(0,0,0)\in\Pi$ y sean $p_1=(x_1,y_1,z_1)$ y $p_2=(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos de Π y λ escalar cualquiera $\Rightarrow$

① $p_1+p_2=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=q\,,\ q\in\Pi\,?$

$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)=$

$ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2=$

$\underbrace{ax_1+by_1+cz_1}_{p_1\in\Pi\Rightarrow 0}+\underbrace{ax_2+by_2+cz_2}_{p_2\in\Pi\Rightarrow 0}=0$

$\Rightarrow q$ cumple con la ecuación de Π, por tanto la suma de dos puntos del plano pertenece al plano

② $\lambda p_1=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)=q'\,,\ q'\in\Pi\,?$

$a\lambda x_1+b\lambda y_1+c\lambda z_1=\lambda(\underbrace{ax_1+by_1+cz_1}_{p_1\in\Pi\Rightarrow 0})=0$

$\Rightarrow q'$ cumple la ecuación de Π, por tanto la multiplicación de λ por un punto del plano pertenece al plano.

③ Sea una recta por el origen $\Rightarrow r$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Si vemos la recta como intersección de dos planos

M2T
Hs

$\forall (x,y,z) \in r$ debe cumplir las ecuaciones de los dos planos.

$\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ ex + fy + gz = 0 \end{cases}$ Estas ecuaciones se pueden expresar de la siguiente manera

$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ ex + fy + gz \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\boxed{\begin{matrix} AX = \bar{0} \\ \forall X \in r \end{matrix}}$

$\Rightarrow$ Para ver si es subespacio $\Rightarrow$ Si $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$X_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$X_1 + X_2 \in r$?
$\lambda X_1 \in r$?

$\Rightarrow \boxed{A(X_1 + X_2) \overset{?}{=} 0}$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$= \boxed{A X_1 + A X_2} = 0 + 0 = \boxed{0}$ ✓
$\underset{X_1 \in r}{A X_1 = 0}, \ \underset{X_2 \in r}{A X_2 = 0}$

Se puede verificar (ejercicio) con $(x,y,z) \in r \quad \lambda(x,y,z) \in r$

(4) En $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$ $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_3 = 0\}$
W es un subespacio de V

(5) Sea P el espacio vectorial del ejemplo (2) y el espacio vectorial P_n del ejemplo (4) $\Rightarrow$
P_n es subespacio de P.

(6) Sea V el ev. del ejemplo (3) y $C[a,b]$ el conjunto de las funciones continuas $\Rightarrow$ $C[a,b]$ es subespacio ~~del~~ ev mencionado

M2T

Subespacio generado e independencia lineal

Definición Sea V ev, $v_1, v_2 \ldots v_n$ vectores de V. Decimos que v es combinación lineal de $v_1, v_2 \ldots v_n$ cuando existen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ / $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_n v_n$

Obs Si $A \neq \emptyset$, subconjunto de V, $[A]$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de A.

TM Sea V ev, $A \neq \emptyset$ $A \subset V \Rightarrow [A]$ es subespacio de V y se le llama subespacio generado por A

Definición Sea V ev y $S \subset V$ sev (subespacio vectorial) decimos que $A \subset S$ es generador de S si $[A] = S$ (Es decir cualquier elemento de S es CL de A).

Notación $A \xrightarrow{g} S$

Ejemplos ① $V = \mathbb{R}^3$ $A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ $A \xrightarrow{g} V$?

Sea $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ para que A genere a $\mathbb{R}^3$, (a,b,c) debe ser CL de A.

$$\Rightarrow (a,b,c) \overset{?}{=} \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0)$$

$$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ b = \alpha_2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ si $c = 0$ se restringe V y deja de ser cualquier vector genérico de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow A$ no genera $\mathbb{R}^3$

Sea $V = \mathcal{M}_{2x2}$ y $S = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} : A = A^t\} \subset \mathcal{M}_{2x2}$
sub espacio de matrices simétricas ¡Determinar un generador! si $A \in \mathcal{M}_{2x2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pero que además $A \in S$ $(A = A^t) \Rightarrow b = c$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(*) $A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Como A matriz simétrica se puede escribir como combinación lineal de:

(*) $(\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c)$

$G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow G \text{ g. } S.$

(*)

Proposición Sea V ev y A subconjunto de V, $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$
Si v_k es combinación lineal de los demás vectores $\Rightarrow$
$[A] = [v_1 \dots v_{k-1}, v_{k+1} \dots v_n]$

Definición Sea ev, $A = \{v_1 \dots v_n\} \subset V$. El conjunto es linealmente independiente (LI) $\Leftrightarrow$ dados $\lambda_1 \dots \lambda_n$ /

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_1 + \dots \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \dots = \lambda_n = 0$

Ejemplos: • $v \in V$, $v \neq 0$ $\{\bar{v}\}$ es LI, • $\{\bar{0}\}$ es LD

• $\{\bar{0}, v_1 \dots v_n\}$ es LD $v_1 \dots v_n \in V$.

• Sea $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subset P_2$ (polinomios de grado 2), $q_1(x) = x + 1$
$q_2(x) = x^2 + x - 1$ $q_3(x) = x^2 + 2x$ $q_4(x) = x^2 - 2$, ¿es LI o LD?

$\Rightarrow \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2 + x - 1) + \lambda_3(x^2 + 2x) + \lambda_4(x^2 - 2) = 0$

$0 = x^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + x(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) + 1.(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4)$

...para que sea cero la componente que multiplica a x^2 debe ser cero y también la componente que multiplica a x y a 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$ resolviendo el sistema.

$\lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_3$

$\lambda_2 = -(\lambda_3 + \lambda_4)$

Sistema compatible indeterminado tiene soluciones distintas de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$\Rightarrow$ No es LI es LD.

→ Base de un espacio vectorial

Definición: Sea V ev y $A = \{v_1 \cdots v_n\} \subset V$. Decimos que A es base de V $\leftrightarrow$
- A es conjunto LI
- A genera a V es decir $[A] = V$

Notación $A \xrightarrow{b} V$.

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,1,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$

- LI: $\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \text{es LI} \checkmark$$

- $B \xrightarrow{g} V$? $(a,b,c) \overset{?}{=} \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b - a \\ \alpha_3 = c \end{array}$$

No hay restricciones sobre a, b o c $\Rightarrow$ cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como CL de B. $\Rightarrow B \xrightarrow{g} V$.

Definición (Dimensión de un espacio vectorial) Sea V ev, si una base de V tiene n elementos $\Rightarrow$

dice que V tiene dimensión n $\dim(V) = n$ M2T H9

Obs todas las bases de V tienen misma cantidad de elementos

Ejemplos: • Sea $\pi : \{2x + y + z = 0\}$ sev de $\mathbb{R}^3$

$z = -(2x + y) \Rightarrow$ tengo 2 grados de libertad

$\Rightarrow$ con $v_1 = (1,0,-2)$ y $v_2 = (0,1,-1)$ genero todo el plano $\pi : \{x(1,0,-2) + y(0,1,-1)\} \Rightarrow$

$* \{(1,0,2)(0,1,-1)\} \xrightarrow{g} \pi$ ¿$*$este conjunto es LI?

$\lambda_1(1,0,-2) + \lambda_2(0,1,-1) = 0$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ conjunto LI

$\Rightarrow$ es base y tiene dimensión 2

(un plano siempre tiene dimensión 2)

• En los ejemplos de generador vimos que

$* \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{g} S$, con S matrices simétricas

$*$Además se puede comprobar que es LI $\Rightarrow$ es base de S, $\Rightarrow \dim S = 3$, las matrices simétricas tienen dimensión 3.