Apuntes 5 - Producto escalar y vectorial

Definición: Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, se llama norma de v al número $d(A,B)$ (distancia entre puntos A y B) con $v = B - A$. La notación de norma es $\|v\|$.

Observación: • La distancia entre dos puntos que se usa en este curso es siendo $A = (x_A, y_A, z_A)$ y $B = (x_B, y_B, z_B)$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

• Es importante entender que un vector v se puede ver como $v = (v_1, v_2, v_3) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$$\Rightarrow \|v\| = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Ejemplo: Sea $v \in \mathbb{R}^3$ definido entre $A = (3,1,2)$ y $B = (1,0,2) \Rightarrow \|v\| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$$\|v\| = \sqrt{5}$$

Es lo mismo que si se expresa $v = B - A = (3-1, 0-1, 2-2)$

$\Rightarrow v = (2, -1, 0)$, $\|v\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

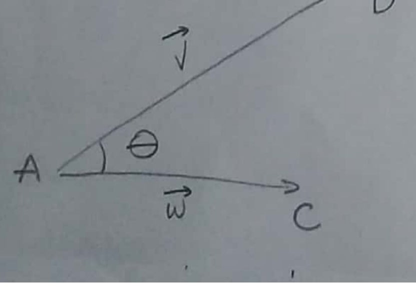
Propiedades

① $\|v\| \geq 0$, $\|v\| \Leftrightarrow v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

② $\|av\| = |a|\|v\| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$

③ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ (Desigualdad triangular)

Def: Dados los vectores v y $w \in \mathbb{R}^n$ se llama producto escalar de v con w al número $\|v\| \|w\| \cos\theta$ con $v = B - A$, $w = C - A$ y θ el angulo $B\hat{A}C$:



Propiedades

① $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

② $\langle av, w \rangle = \langle v, aw \rangle = a\langle v, w \rangle \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

③ $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle, \quad \langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$

$\forall\, v, u, w \in \mathbb{R}^n$

④ $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Fórmula de cálculo de producto escalar

Sea $v = (v1, v2, \dots, vn)$ y $w = (w1, w2, \dots, wn) \Rightarrow$

$\langle v, w \rangle = v1.w1 + v2.w2 + \dots + vn\,wn$

Ej. Sea $v = (1, -1, 0)$ y $w = (6, 1, 3) \Rightarrow$

$\langle v, w \rangle = 1.(6) + (-1)(1) + (0)(3) = 6 - 1 = 5$

Observación: $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ o $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ Sea el vector

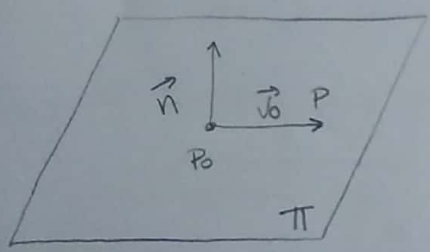
$v = (v1, v2, \dots, vn) \Rightarrow \langle v, v \rangle = v1.v1 + v2.v2 + \dots + vn.vn$

$\langle v, v \rangle = v1^2 + v2^2 + \dots + vn^2$ y $\|v\| = \sqrt{v1^2 + v2^2 + \dots + vn^2}$

$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Aplicaciones geométricas

Ecuación implícita del plano con el vector normal y un punto perteneciente al plano.



- $\vec{n}$ vector normal perpendicular al plano π, v
- $\vec{v_0}$ vector perteneciente al plano, $v_0 = P - P_0$

Como θ entre $\vec{n}$ y $\vec{v_0}$ es 90° $\Rightarrow \langle n, v_0 \rangle = \|n\|\,\|v_0\| \cos\theta$

$\cos 90° = 0 \Rightarrow \langle n, v_0 \rangle = 0$.

Si $P = (x, y, z)$ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $n = (n1, n2, n3)$

$\langle (n1, n2, n3), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$

$$\langle n, v_0 \rangle = \boxed{n_1 . (x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0}$$

Ecuación implícita del plano

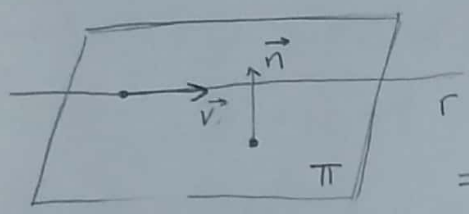
Ej: Plano con vector normal $\vec{n} = (1,2,1)$ y que pasa por $P_0 = (3,2,1) \Rightarrow v_0 = (x-3, y-2, z-1) \Rightarrow$

$\langle (1,2,1), (x-3, y-2, z-1) \rangle = 1.(x-3) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0$

$x - 3 + 2y - 4 + z - 1 = 0$ $\boxed{x + 2y + z - 8 = 0}$

Obs Los coeficientes que multiplican a x, y, z son las componentes del vector normal.

Condición para que la recta y el plano sean paralelos



Sea π dado por $ax + by + cz + d = 0$ y r con vector director $v = (v_1, v_2, v_3)$

$\Rightarrow$ si $\langle n, v \rangle = 0$ π y r son paralelos

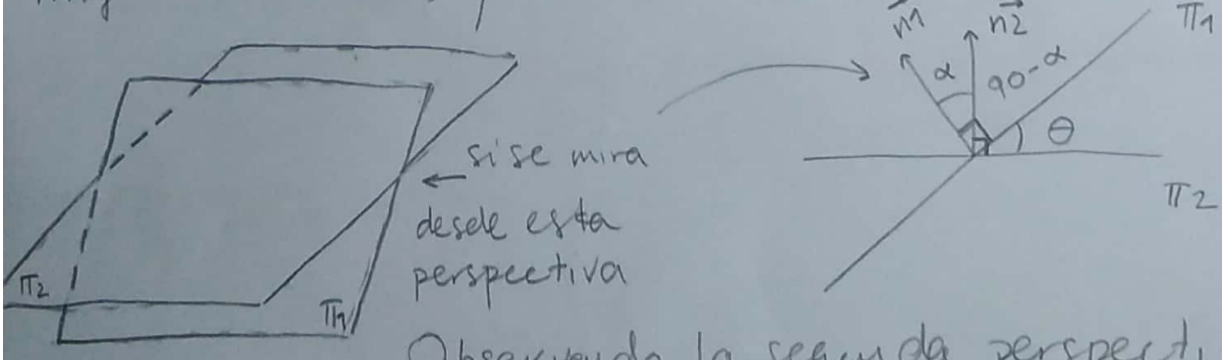
Ej Sea r dada por $r \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y $\pi)\ y + z - 3 = 0$

$\Rightarrow$ V director / $v = (1, -2, 2)$ y $n = (0, 1, 1) \Rightarrow$

$\langle (1, -2, 2)(0, 1, 1) \rangle = 1.0 + (-2)(1) + 2(1) = 0 - 2 + 2 = 0$

$\Rightarrow \langle n, v \rangle = 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos.

Ángulo entre dos planos



Observando la segunda perspectiva

$\alpha + 90 - \theta = 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha - \theta = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = \theta$ y α se

Obtiene del producto escalar entre $\vec{n1}$ y $\vec{n2}$ $\Rightarrow$

$\langle n1, n2\rangle = \|n1\|\|n2\| \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\langle n1, n2\rangle}{\|n1\|.\|n2\|}$ $\Rightarrow$ como $\alpha = \theta$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle n2, n1\rangle}{\|n1\|.\|n2\|}\right)$$

Ej Sea $\Pi_1)\ 3x - 2y + z - 1 = 0$ y $\Pi_2)\ -2x + y + z = 0$

¿Cuál es el ángulo entre ellos?

$\Rightarrow n1 = (3, -2, 1)$ $\quad n2 = (-2, 1, 1)$ $\Rightarrow \|n1\|, \|n2\|, \langle n1, n2\rangle$?

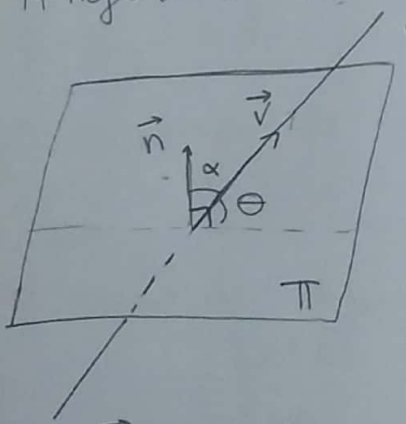
$\langle n1, n2\rangle = 3(-2) + (-2)(1) + (1)(1) = -6 - 2 + 1 = -7$

$\|n1\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}$ y $\|n2\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1}$

$\|n1\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$ $\quad \|n2\| = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right)$$

Ángulo entre recta y plano



Observando el diagrama $\alpha + \theta = 90°$

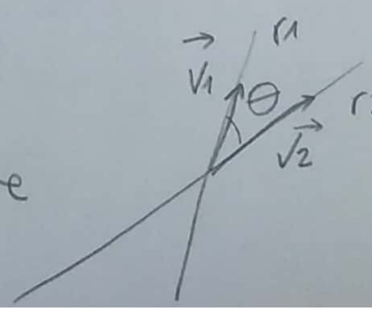
$\Rightarrow \theta = 90° - \alpha$, siendo θ el ángulo entre r y Π y α el ángulo entre $\vec{n}$ y $\vec{v}$ (α se obtiene con el producto escalar entre los vectores). $\vec{n}$ es el vector normal al plano y $\vec{v}$ es el vector director de la recta $\Rightarrow$

$\langle n, v\rangle = \|n\|\|v\| \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\langle n, v\rangle}{\|n\|\|v\|}$, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle n, v\rangle}{\|n\|\|v\|}\right)$

$$\Rightarrow \theta = 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\langle n, v\rangle}{\|n\|\|v\|}\right)$$

Ángulo entre rectas

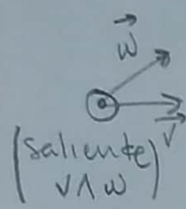
θ se obtiene del producto escalar entre los vectores directores de las rectas

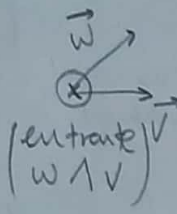


$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos\theta$, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|}\right)$

Producto vectorial

Def. El producto vectorial es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que se denota $v \wedge w$ y cumple:
- $\|v \wedge w\| = \|v\| \|w\| \operatorname{sen}\theta$ (módulo)
- $\langle v \wedge w, v\rangle = 0$ y $\langle v \wedge w, w \rangle = 0$ (dirección)





(buscar en internet)
- Si v, w son distintos de cero se cumple la regla de la mano derecha

Propiedades

① $v \wedge w = 0$ si v o w son cero o si $v = \lambda w$ (es decir v es combinación lineal de w) $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

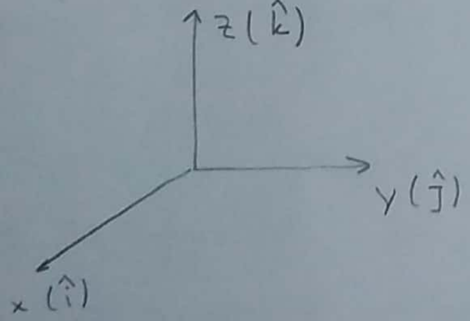
② $v \wedge w = -\, w \wedge v$ (No es conmutativo) $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

③ No es asociativo

④ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda(v \wedge w) = (\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w)$ $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

⑤ Distributiva:
- $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$ $\forall\, v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$
- $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$ $\forall\, v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$

Fórmula de cálculo



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ versores: son vectores que tienen módulo 1 e indican la dirección y el sentido de los ejes cartesianos

$$v \wedge w = \left|\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right|$$

sólo para vectores en $\mathbb{R}^3$

con $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$

Ej. Sea v y w / $v = (2, 1, -5)$ y $w = (4, 1, 1)$ $\Rightarrow$

$$v \wedge w = \left| \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

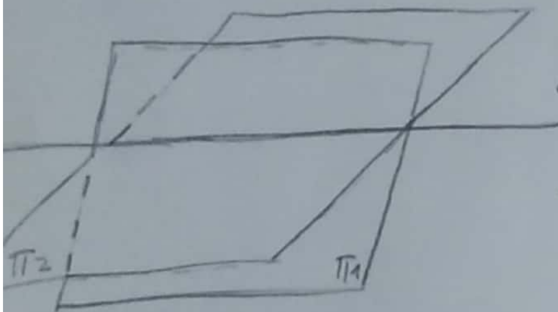
$$-4(1)\hat{k} + 5\hat{i} - 2\hat{j} + 1\hat{i} - 4(5)\hat{j} + (1)(2)\hat{k} =$$

$$-4\hat{k} + 5\hat{i} - 2\hat{j} + 1\hat{i} - 20\hat{j} + 2\hat{k} = 6\hat{i} - 22\hat{j} - 2\hat{k}$$

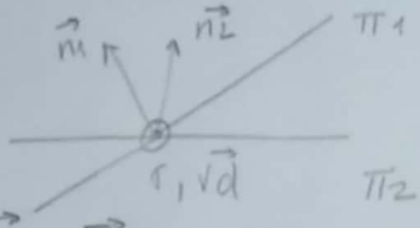
$$\Rightarrow v \wedge w = 6\hat{i} - 22\hat{j} - 2\hat{k} = (6, -22, -2)$$

Aplicación geométrica.

Intersección entre dos planos no paralelos (una recta)



si se mira desde esta perspectiva



$\vec{n_2} \wedge \vec{n_1} = vd$, saliente a la hoja, siendo vd vector director de r.

Ej Sea $\pi_1)\ 3x - 2y + z + 1 = 0$ y $\pi_2)\ -2x + y + z = 0$

¿cuál es la recta de intersección entre π_1 y π_2?

• Primero se encuentra el vector director de r:

$$n_1 = (3, -2, 1) \quad n_2 = (-2, 1, 1) \Rightarrow n_2 \wedge n_1 = \left| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$-4\hat{k} - \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\Rightarrow n_2 \wedge n_1 = vd = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 1\hat{k} = (-3, -5, -1)$$

• Para encotrar un punto de la intersección se debe resolver:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right)_{3F_2 - 2F_1} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right) \Rightarrow (\text{II})\ 7y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - 7y$$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow$ ① $3x - 2y + (2 - 7y) = -1 \Rightarrow x = \dfrac{-3 + 9y}{3} = -1 + 3y$

$\Rightarrow Sol(S) = \{(-1 + 3y,\ y,\ 2 - 7y)\}$ Si por ejemplo $y = 0$ se fija la solución en un punto en particular y se tiene un punto de la intersección (de la recta).

$P_0 = (-1, 0, 2) \Rightarrow r_{\text{intersección}} = \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 0 - 5\lambda \\ z = 2 - \lambda. \end{cases}$