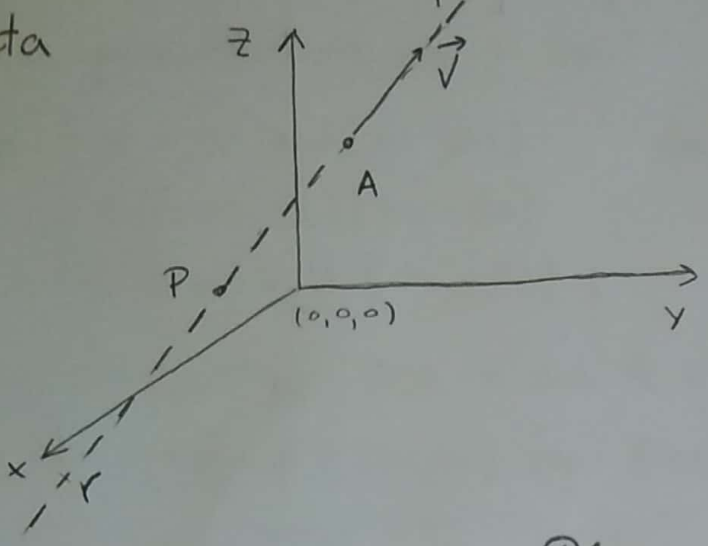
Apuntes 4 - Recta y plano en $\mathbb{R}^3$ H1

Recta



$A = (a_1, a_2, a_3)$ punto que se conoce y pertenece a la recta.

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vector director de la recta

$P = (x, y, z)$ punto genérico perteneciente a la recta.

Ecuaciones (Ecs) peramétricas (*1) de la recta

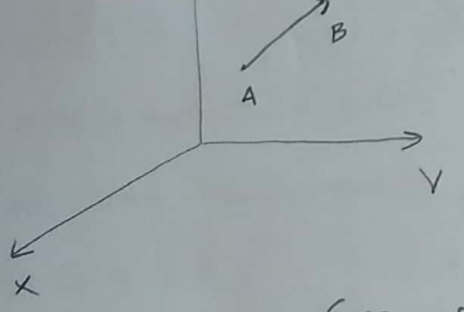
Sea r una recta con A punto / $A \in r$ y $\vec{v}$ su vector director, con P punto genérico / $P \in r$ $\Rightarrow$ Las ecs peramétricas de r son:

$P = A + \lambda \vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es lo mismo que plantear $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$.

También igual a $r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$

Observación (Obs): • El vector director se puede ver directamente como un vector. Pero también se puede expresar como resta de puntos en el espacio.



$\vec{v} = B - A$, con $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$A = (a_1, a_2, a_3)$
$B = (b_1, b_2, b_3)$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

• Gracias a la observación anterior se puede obtener las ecs. peramétricas de la recta con dos puntos que pertenecen a ella.

(*1) Se las llama ecuaciones peremétricas porque dependen de un perámetro λ.

Sea r una recta con A, B puntos / $A, B \in r \Rightarrow$ las ecs perámétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \end{cases} \quad \text{con } \begin{array}{l} A = (a_1, a_2, a_3) \\ B = (b_1, b_2, b_3) \end{array}$$

Ejemplo 1 (Ej): Sea r con $A \in r$ / $A = (3, 1, -2)$ y $\vec{v}$ vector director / $\vec{v} = (1, 0, -2) \Rightarrow$ Ecs perámétricas:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda(1) \\ y = 1 + \lambda(0) \\ z = -2 + \lambda(-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

Ej 2: Sea r con A y B puntos con $A, B \in r$ / $A = (3, 1, -2)$ y $B = (4, 1, -4) \Rightarrow$ Ecs perámétricas:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda(4-3) \\ y = 1 + \lambda(1-1) \\ z = -2 + \lambda(-4-(-2)) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda(1) \\ y = 1 + \lambda(0-0) \\ z = -2 + \lambda(-2) \end{cases}$$

Obs. Se tomó B para que el ejemplo 1 y el 2 representaran a la misma recta.

¿Cómo saber si un punto Q pertenece a una recta r?

¿ Sea la recta r de los ejemplos anteriores, $Q_1 = (1, 1, 2)$ y $Q_2 = (4, 1, 0)$. Para ver si Q_1 y Q_2 pertenecen a r se debe reemplazar Q_1 y Q_2 en P y comprobar que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ / se cumplan las tres ecuaciones?

$\rightarrow Q_1 \in r$?
$$\begin{cases} 1 \overset{?}{=} 3 + \lambda & \rightarrow \text{(i)} \ \lambda = 1 - 3 = -2 \\ 1 \overset{?}{=} 1 \ \checkmark & \text{(ii)} \ \checkmark \\ 2 \overset{?}{=} -2 - 2\lambda & \text{(iii)} \ \lambda = \dfrac{2+2}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2 \end{cases}$$

Como λ es único para las tres ecuaciones $\Rightarrow Q_1 \in r$.

$\rightarrow Q_2 \in r?$

$$\begin{cases} 4 \overset{?}{=} 3 + \lambda \rightarrow \text{(I)}\ \lambda = 4 - 3 = 1 \\ 1 = 1 \checkmark \qquad \text{(II)} \checkmark \\ 0 = -2 - 2\lambda \ \text{(III)}\ \lambda = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases} \Big\} \text{ ABS } 1 \neq -1$$

$\Rightarrow Q_2 \notin r$ (*1)

Ecs. implícitas (*2) de la recta.

Para encontrar las ecs. implícitas de la recta se encuentra el parámetro λ en función del punto genérico $P = (x, y, z)$ y luego se igualan los distintos λ encontrados.

Si $r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)}\ \lambda = (x - a_1)/v_1 \\ \text{(II)}\ \lambda = (y - a_2)/v_2 \\ \text{(III)}\ \lambda = (z - a_3)/v_3 \end{array} \Rightarrow$ se generan tres igualdades

(Ecs. paramétricas)

$\Rightarrow \dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$, $\dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$, $\dfrac{z - a_3}{v_3} = \dfrac{x - a_1}{v_1}$ (Ecs implícitas)

Obs: • Importante con elegir dos de las tres ecs implícitas la recta queda representada.

• Si v_1, v_2, v_3 son cero no se podría dividir pero si una componente del vector director es cero, el λ no aperece y la ecuación pasa a ser una representante de la recta directamente.

Ej 1: Sea r la misma recta de los egemplos anteriores $\Rightarrow$ Ecs paramétricas:

$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)}\ \lambda = x - 3 \\ \text{(II)}\ y = 1 \\ \text{(III)}\ \lambda = \dfrac{z + 2}{-2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I) y (III)}\ x - 3 = \dfrac{z+2}{-2} \\ \text{(II)}\ y = 1 \end{array}$

(*1) Símbolo matemático de no pertenencia $\notin$

(*2) Se denominan implícitas porque no dependen de $\lambda \in \mathbb{R}$ (el parámetro está implícito)

$\Rightarrow$ ① y ③ $-2(x-3) = z+2 \Rightarrow -2x+6 = z+2 \Rightarrow 6-2 = z+2x$

$\Rightarrow z + 2x = 4$ además $y = 1 \Rightarrow r: \begin{cases} z + 2x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ Ecuaciones implícitas de r.

Ej 2: Sea r / sus ecs paramétricas son:

$r = \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow$ ① $\lambda = 2 - x$, ② $\lambda = (y-1)/4$, ③ $\lambda = z/3$ $\quad \begin{cases} 2 - x = (y-1)/4 \\ (y-1)/4 = z/3 \\ z/3 = 2 - x \end{cases}$

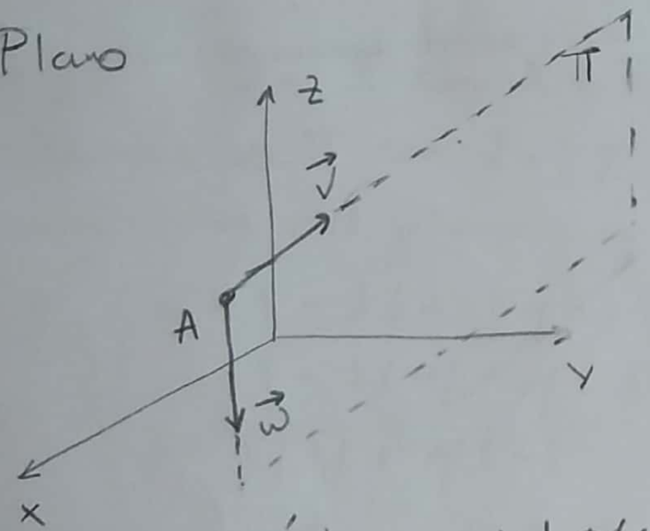
$\Rightarrow$ Se toman dos ecuaciones, $(y-1)/4 = z/3$ y $z/3 = 2-x$

se pueden simplificar: $3(y-1) = 4z \Rightarrow 3y - 3 = 4z$

$\Rightarrow 3y - 4z = 3$, también $z = 3(2-x) \Rightarrow z = 6 - 3x$

$\Rightarrow r: \begin{cases} 3y - 4z = 3 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$ Ecuaciones implícitas de r.

Plano



$A = (a1, a2, a3)$ punto conocido que pertenece a π

$\vec{v} = (v1, v2, v3)$ vector director 1 de π

$\vec{w} = (w1, w2, w3)$ vector director 2 de π.

Ecs paramétricas del plano.

Sea π plano con A punto / $A \in \pi$ y $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores directores con P punto genérico / $P \in \pi \Rightarrow$ Las ecs paramétricas de π:

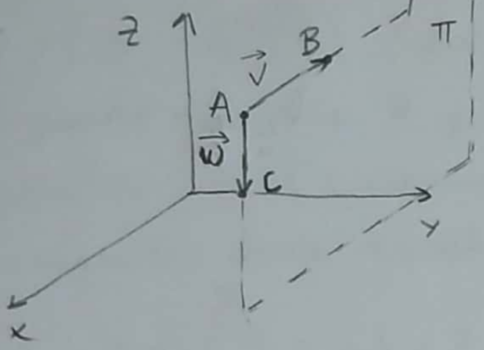
$P = A + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, con λ y $\mu \in \mathbb{R}$.

También se puede plantear:

$(x, y, z) = (a1, a2, a3) + \lambda(v1, v2, v3) + \mu(w1, w2, w3)$

Que es lo mismo a $\Pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$

Obs: • Al igual que en la recta se puede ver los vectores directores como resta de puntos:



$\vec{v} = B - A$ y $\vec{w} = C - A$

$(v_1, v_2, v_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$(w_1, w_2, w_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$

• Gracias a la obs. anterior se pueden obtener las ecs paramétricas del plano con tres puntos que pertenecen a él.

Sea Π un plano con A, B, C puntos / $A, B, C \in \Pi \Rightarrow$ las ecs. paramétricas son $\Pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda (b_1 - a_1) + \mu (c_1 - a_1) \\ y = a_2 + \lambda (b_2 - a_2) + \mu (c_2 - a_2) \\ z = a_3 + \lambda (b_3 - a_3) + \mu (c_3 - a_3) \end{cases}$

Ej 1: Sea Π con $A \in \Pi$ / $A = (1, -1, 0)$ y $\vec{v}, \vec{w}$ vectores directores de Π con $\vec{v} = (2, 4, 1)$ y $\vec{w} = (3, -3, 2)$. Las ecs paramétricas del plano son:

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda (2) + \mu (3) \\ y = -1 + \lambda (4) + \mu (-3) \\ z = \lambda (1) + \mu (2) \end{cases} \longrightarrow \Pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -1 + 4\lambda - 3\mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Ej 2: Sea Π con $A, B, C \in \Pi$ / $A = (1, -1, 0)$, $B = (3, 3, 1)$ y $C = (4, -4, 2)$ Las ecs. paramétricas son:

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda (3 - 1) + \mu (4 - 1) \\ y = -1 + \lambda (3 - (-1)) + \mu (-4 - (-1)) \\ z = \lambda (1 - 0) + \mu (2 - 0) \end{cases} \Rightarrow \Pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -1 + 4\lambda - 3\mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Obs Se tomeron A, B, C para que los dos ejemplos representaran el mismo plano.

- Cómo saber si un punto Q pertenece a un plano Π?

Є Sea el plano de los ejemplos anteriores, $Q_1 = (6, 0, 3)$ y $Q_2 = (3, -4, 1)$. Para ver si $Q_1, Q_2 \in \Pi$ se remplaza Q_1 o Q_2 en el punto genérico P y se comprueba que $\exists\ \lambda$ y $\mu \in \mathbb{R}$ / se cumplan las tres ecuaciones. A diferencia de una recta, se tienen dos incógnitas $\Rightarrow$ se resuelve mediante sistema de ecs.

$\rightarrow Q_1$: $\begin{cases} 6 \overset{?}{=} 1 + 2\lambda + 3\mu \\ 0 \overset{?}{=} -1 + 4\lambda - 3\mu \\ 3 = \lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow$ Para transformar en sistema: $\begin{matrix} 2\lambda + 3\mu = 6 - 1 \\ 4\lambda - 3\mu = 0 + 1 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

(III) $-\mu = 1 \Rightarrow \mu = 1$

(II) $4\lambda - 3(1) = 1 \Rightarrow 4\lambda = 4$

$\lambda = 1$

(se debe comprobar la primera ecuación aunque se tengan valores de λ y μ)

(I) $2(1) + 3(1) = 5$ ✓

$\Rightarrow Q_1 \in \Pi$

$\rightarrow Q_2$ $\begin{cases} 3 \overset{?}{=} 1 + 2\lambda + 3\mu \\ -4 = -1 + 4\lambda - 3\mu \\ 1 = \lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda + 3\mu = 2 \\ 4\lambda - 3\mu = -3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

(III) $-\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$

(II) $4\lambda - 3(0) = -3 \Rightarrow \lambda = -3/4$

(I) $2(-3/4) + 3(0) = 2 \Rightarrow -\frac{6}{4} = 2$ ABS ↯

$\Rightarrow -\frac{3}{2} \neq 2 \quad Q_2 \notin \Pi.$

Ecuación implícita del plano. H7

Para encontrar la ecuación implícita del plano se iguala a cero el siguiente determinante y se construye la ecuación:

Sea π dado por $A=(a_1,a_2,a_3)$ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$$\left|\begin{pmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Esta ecuación resulta de la forma $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ con A, B, C y $D \in \mathbb{R}$.

Ej 1: Considerando π de los ejemplos anteriores; $A=(1,-1,0)$ $\vec{v}=(2,4,1)$ y $\vec{w}=(3,-3,2)$ $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Calculando con Sarrus:

$$\left|\begin{matrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x-1 & y+1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

$-(3)(4)z-(-3)(1)(x-1)-2(2)(y+1)+(2)(4)(x-1)+(3)(1)(y+1)$
$+(-3)(2)(z)=0 \Rightarrow -12z+3(x-1)-4(y+1)+8(x-1)+3(y+1)$
$-6z=0$

$\Rightarrow -18z+11(x-1)-(y+1)=0$, $-18z+11x-11-y-1=0$

$\Rightarrow 11x-y-18z-12=0 \rightarrow$ Ec. implícita de π.

Posiciones relativas rectas y planos.

Recta

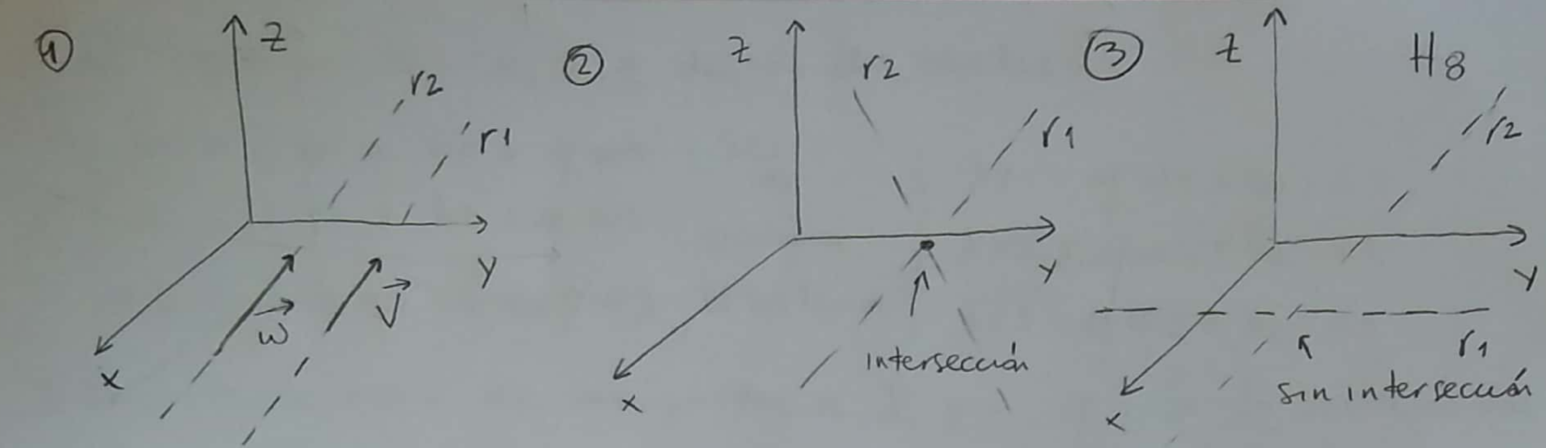
Las rectas en el espacio pueden:

① Ser paralelas (si son la misma recta también se les dice paralelas)

② Cortarse ⊛1 en un solo punto

③ Cruzarse ⊛2 sin cortarse

⊛1 Diferenciar bien el concepto de cruzarse y de cortarse



Obs. El caso 3 es difícil de representar en dos dimensiones.

① Paralelas → Los vectores directores de r1 y r2 son múltiplos (*)1 el uno de otro. $V = \gamma w$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$

→ (si son la misma recta) Comparten infinitos puntos en común.

② Cortan en un punto → Los vectores directores de r1 y r2 no son múltiplos el uno del otro. $\nexists \gamma \,/\, V = \gamma w$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$

→ Comparten un único punto en común.

③ Cruzan sin cortarse → Los vectores directores de r1 y r2 no son múltiplos el uno del otro. $\nexists \gamma \,/\, V = \gamma w$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$

→ No comparten ningún punto.

Entonces para saber la posición relativa de dos rectas se saber dos cosas si los vectores directores son múltiplos entre ellos y si las rectas comparten algún punto.

Para lo primero se estudia si V y w son combinación lineal el uno del otro.

Para lo segundo se conforma el siguiente sistema y se estudia el tipo de solución que tiene:

Sea $r1: \begin{cases} x = a_1 + \lambda V_1 \\ y = a_2 + \lambda V_2 \\ z = a_3 + \lambda V_3 \end{cases}$ y $r2: \begin{cases} x = b_1 + \mu w_1 \\ y = b_2 + \mu w_2 \\ z = b_3 + \mu w_3 \end{cases}$

(*)1 Decir que dos vectores son múltiplos es lo mismo que afirmar que sean combinación lineal el uno del otro.

Se igualan las x, y, z de las dos rectas: Hq.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + \lambda v_1 = b_1 + \mu w_1 \\ a_2 + \lambda v_2 = b_2 + \mu w_2 \\ a_3 + \lambda v_3 = b_3 + \mu w_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{se ordena el sistema}} \begin{cases} \lambda v_1 - \mu w_1 = b_1 - a_1 \\ \lambda v_2 - \mu w_2 = b_2 - a_2 \\ \lambda v_3 - \mu w_3 = b_3 - a_3 \end{cases}$$

El sistema tiene de incógnitas a λ y a μ. Si la solución del sistema es:

→ SI, incompatible puede ser paralelas (sin ser la misma recta) o pueden cruzarse sin cortarse. (posición 1 o 3)

→ SCD, compatible determinado se cortan en un punto (posición 2)

→ SCI, compatible indeterminado, son la misma recta (posición 1)

Obs En caso de sistema incompatible se necesita saber la relación de los vectores directores.

Ej: Sea r1 y r2, estudiar su posición relativa en el espacio.

$$r_1: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = 3\mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

① Se arma el sistema a estudiar:

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda = -1 + 2\mu \\ 2 + \lambda = 3\mu \\ -2 + 4\lambda = 2 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda - 2\mu = -1 - 1 \\ \lambda - 3\mu = -2 \\ 4\lambda - \mu = 2 + 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{cambio filas}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & 12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ (III) $11\mu = 12 \Rightarrow \mu = 12/11$

(II) $-3\lambda - 2(12/11) = -2 \qquad \lambda = \left(2 - \frac{24}{11}\right)/3$

$\lambda = \left(\frac{22-24}{11}\right)/3 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{33}$

(I) $-\frac{2}{33} - 3\left(\frac{12}{11}\right) \overset{?}{=} -2 \qquad \frac{-2-9(12)}{33} \overset{?}{=} -2 \qquad \frac{-2-108}{33} \overset{?}{=} -2$

$-\frac{110}{33} = -3,33\ldots \neq 2$ ABS $\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

. Los vectores son CL el uno del otro? $v = (-3, 1, 4)$ $w = (2,3,1)$

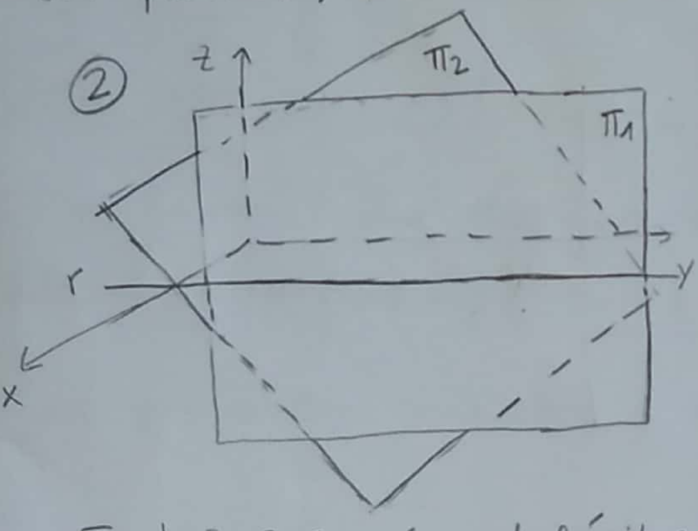
¿ $\nexists \gamma \,/\, v = \gamma w$ con $\gamma \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Son rectas que se cruzan y no se cortan.

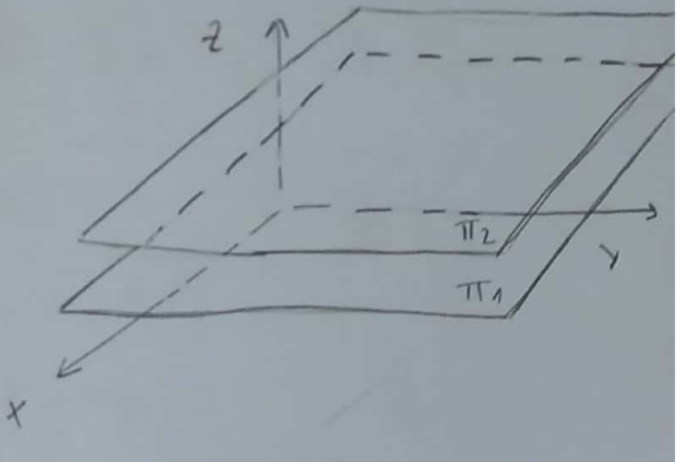
Plano

Los planos en el espacio pueden

① Cortarse en una recta

② Ser paralelos (si son el mismo plano se les dice paralelos).





Obs. Estos casos son difíciles de representar en dos dimensiones

Para saber la posición relativa de dos planos se trabaja con las ecuaciones implícitas de los planos. Se construye un sistema con las dos ecuaciones y se analiza la solución del mismo. Sea Π_1 y Π_2 determinados por:

$\Pi_1)\ Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad \Pi_2)\ Ex + Fy + Gz + H = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = -D \\ Ex + Fy + Gz = -H \end{cases}$$

El sistema tiene de incógnitas a x, y, z. Si la solución del sistema es:
- $\rightarrow$ SI, incompatible son planos paralelos sin ser el mismo.
- $\rightarrow$ SCI con un grado de libertad, son planos que se cortan en una recta.
- $\rightarrow$ SCI con dos grados de libertad, son planos iguales.

Ej: Sea π_1 y π_2 estudiar su posición relativa en el espacio

$\pi_1: 3x - 2y + 4z - 1 = 0$ π_2 $6x - 4y + 8z - 2 = 0$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ 6x - 4y + 8z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{2F_1 - F_2} \Rightarrow ① \; 3x - 2y + 4z = 1$$

$$x = \frac{1 - 4z + 2y}{3}$$

El sistema tiene dos grados de libertad. $Sol(S) = \{(\frac{1 - 4z + 2y}{3}, y, z)\}$

$\Rightarrow$ Los planos son paralelos y el mismo