Apuntes 3 - Sistemas de ecuaciones

Definición (Def): Sistema de ecuaciones Apuntes 1 - H1

Def. Una solución del sistema es el conjunto de números ordenados $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ / si se sustituye $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2 \cdots$ $x_n = \alpha_n$ se verifican las m ecuaciones.

Ejemplo (Ej): sea el sistema $S = \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

Una solución del sistema es $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. Se observa que: $S \begin{cases} -1 + 2(0) + 3(1) \overset{?}{=} 2 \\ -1 + 3(0) - (1) \overset{?}{=} -2 \\ 3(-1) + 4(0) + 3(1) \overset{?}{=} 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} -1+3 \overset{\checkmark}{=} 2 \\ -1-1 \overset{\checkmark}{=} -2 \\ -3+3 \overset{\checkmark}{=} 0 \end{array}$ se verifican las tres ecuaciones.

Def. Se llama conjunto solución, Sol(S) al conjunto de todas las soluciones.

Observación (Obs): • Si $\# Sol(S) = 1$ (*1) el sistema es compatible determinado

• Si $\# Sol(S) > 1$, el sistema es compatible indeterminado (si tiene más de una solución tiene infinitas).

• Si $\# Sol(S) = 0$ el sistema es incompatible.

Def Transformaciones elementales Apuntes 2 - H6

Método de escalerización (método para resolver sistemas y encontrar el conjunto solución.

(*1) Símbolo matemático que representa cantidad de... en este caso soluciones

Def Se llama matriz escalerizada a una matriz que cumple las siguientes condiciones: A3 - H2

① Todas las filas, salvo la primera comienzan en una sucesión de ceros.

② Cada fila tiene al principio por lo menos un cero más que la fila inmediatamente superior (Esta regla no aplica en la primera fila).

Ej 1: $S \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz ampliada}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$

Escalerizo:

① Con ayuda de las transformaciones elementales y la primera fila genero ceros en la primera columna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) F_3 + F_1/2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) F_2 - F_1/2$$

② Con ayuda de transformaciones elementales y la primera fila, me muevo generar ceros en la segunda columna y así sucesivamente en las columnas hasta obtener una escalera de ceros.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) 3F_3 + F_2 \Rightarrow \begin{cases} ① \; 2x + 4y + 2z = -2 \\ \quad -y + z = 1 \\ \quad 2z = 4 \end{cases}$$

es una escalera

(iii) $z = 4/2 = 2$ (ii) $y = z - 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

(i) $x = (-2 - 2z - 4y)/2 \Rightarrow x = (-2 - 2(2) - 4(1))/2$

$x = (-2-4-4)/2 \quad x = -10/2 = -5$

$\Rightarrow$ $Sol(S) = \{(-5,1,2)\}$ Como $\#Sol(S) = 1$ el sistema es compatible determinado.

Ej 2: $S \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)_{2F_1-F_3} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) F_1-F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_3-2F_2}$$

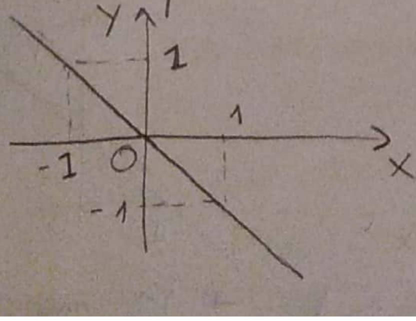
Obs Fila de ceros indica grado de libertad sobre una de las variables

$\Rightarrow S \begin{cases} x+y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$

La tercera ec. indica que una variable queda no determinada (grado de libertad), el sistema será compatible indeterminado.

(II) $z=0 \rightarrow$ (1) $x+y=0 \Rightarrow y=-x$ (es una recta!)

hay infinitos puntos que pertencen a la recta y cumplen las restricciones del sistema



Puntos que pertencen:
(0,0)
(1,-1)
(2,-2)

$Sol(S) = \{(x,-x,0)\}$

La x queda no determinada.

$\#Sol(S) > 1$ Sistema compatible indeterminado Ap 3-H4

Ej 3: $S \begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = 1 \\ -y + z = -2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) 2F_1 - F_2 \longrightarrow$ Esta fila indica una incompatibilidad.

$S \begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ 0 = 5 \\ -y + z = 2 \end{cases}$ $\leftarrow$ ABSURDO ($\lightning$) $\Rightarrow$ El sistema es incompatible $\#Sol(S) = 0$

Def Un sistema con todos los términos independientes nulos se denomina homogéneo.

Ej: Ejemplo 2 de sistema de ecuaciones (Ap-3 H2)

Proposición (Pp): Un sistema lineal homogéneo es siempre compatible.

Espacio $\mathbb{R}^n$

Un elemento perteneciente a $\mathbb{R}^n$ tiene la siguiente forma:

$X \in \mathbb{R}^n / X = \{(x_1, x_2 \cdots, x_n)\} / x_i \in \mathbb{R} \ \forall i: 1 \cdots n\}$

Ej 1: $X_1 \in \mathbb{R}^2$, $X_1 = (1, 2)$

Ej 2: $X_2 \in \mathbb{R}^4$, $X_2 = (-1, 0, 3, \pi)$

Operaciones

Def Sea $X = (x_1, \cdots, x_n)$, $Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la suma $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \cdots, x_n + y_n)$ y la multiplicación por un escalar $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2 \cdots, \alpha x_n)$

Propiedades

① Conmutativa: $X+Y = Y+X \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

② Asociativa: $(X+Y)+Z = X+(Y+Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

③ Neutro de la suma: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n / X+0 = X \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$

④ Existencia de opuesto Para cada $X \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, Y \in \mathbb{R}^n /$ $X+Y=0 \quad (Y=-X)$

⑤ Asociativa de la multiplicación $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall X \in \mathbb{R}^n$

⑥ Neutro de la multiplicación: $1X = X \quad 1 \in \mathbb{R} \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$

⑦ Distributiva 1: $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall X \in \mathbb{R}^n$

⑧ Distributiva 2: $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

Def Se llama a $X \in \mathbb{R}^n$ combinación lineal (CL) de $X_1, X_2, \cdots, X_m$ si $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m \in \mathbb{R}$ (coeficientes) $/ X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_m X_m$

Obs • $X = (0, 0 \cdots, 0)$ es combinación lineal de cualquier colección de $X_1 \cdots X_m$. Basta tomar $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \cdots = \lambda_m$

• Si X es CL de $A = \{X_1, X_2 \cdots X_m\} \Rightarrow$ es CL también de $B = \{X_1, X_2 \cdots X_m, X_{m+1}, \cdots X_n\}$ $(A \overset{(*)1}{\subset} B)$. Basta tomar: $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \cdots \lambda_m X_m + 0.X_{m+1} + \cdots + 0.X_n$

Ej 1: Sea $A = \{(1,2,1), (2,-2,2)\} \Rightarrow X = (0,6,0)$ es CL de A, si $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$

$$(0,6,0) = 2(1,2,1) - 1(2,-2,2) = (2-2, 4+2, 2-2)$$
$$= (0,6,0)$$

Ap 3 - H6

Ej 2: Sea $A = \{(1,1), (1,0), (-1,1)\} \Rightarrow X = (2,1)$ es CL de A con $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$, también puede ser $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.

$(2,1) = 2(1,1) - (1,0) - (-1,1) = (2-1+1, 2-1) = (2,1)$ ✓

$(2,1) = (1,1) + (1,0) + 0(-1,1) = (1+1+0, 1+0+0) = (2,1)$ ✓

Obs Los coeficientes $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ pueden no ser único.

¿Cómo ver si un elemento $X \in \mathbb{R}^n$ es CL de $A = \{X_1, X_2 \cdots X_m\}$?

Se considera el ejemplo 2: ¿$\exists\ \lambda_1, \lambda_2 /$ X es CL de A?

Se plantea: $(2,1) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,0) + \lambda_3(-1,1)$ que presenta tres ecuaciones una en cada componente:

$$S \begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$$ Es un sistema de ecuaciones $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Si al resolver el sistema es compatible (determinado o indeterminado) X es CL de A con la Sol(S) correspondiendo a los λ_i. Si el sistema es incompatible X no es CL de A.

Ej 3: Sea $A = \{(1,1,1), (3,2,1)\}$ y $X = (2,1,0)$

$(2,1,0) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(3,2,1)$

$$S \begin{cases} 2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) F_1 - F_3$$

$\Rightarrow$ (iii) $2\lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 1$

(ii) $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \quad \lambda_1 + 2(1) = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 2 = -1$

(i) El resultado cumple (i)? $1(-1) + 3(1) = 2$

$-1 + 3 = 2$ ✓

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow (2,1,0) = (-1)(1,1,1) + (3,2,1)$

Def Un conjunto $A = \{X_1, X_2 \cdots X_m\} \in \mathbb{R}^n$:

- Se dice linealmente dependiente (LD) si $\exists \lambda_1 \cdots \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos / $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_m X_m = 0$
- Se dice linealmente independiente (LI) si $\exists \lambda_1, \cdots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_m X_m = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_m = 0$$

Pp Sea $A = \{X_1, X_2 \cdots, X_m\} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

1. A es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \exists X_{i0} \in A / X_{i0}$ es CL del resto de los elementos de A.
2. A es linealmente independiente si ningún elemento es CL de los restantes.

- ¿Cómo ver si un conjunto es LD o LI?

Ej. Dado $A = \{(1,1,-1), (1,0,1), (1,1,1)\}$ ¿A es LI o LD?

Se plantea. $\lambda_1(1,1,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,1) = 0$ que presenta tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) F_1 + F_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) F_2 - F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) F_3 + 2F_2$$

Obs. Para construir el sistema se colocan los elementos de $\mathbb{R}^n$ como columnas.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{III } \lambda_3 = 0 \\ \text{II } \lambda_2 = 0 \\ \text{I } \lambda_1 + 0 + 0 = 0 \quad \lambda_1 = 0 \end{array}$$

El conjunto A es LI.

Obs Un conjunto es LI si el sistema homogéneo es determinado (sólo la solución trivial (*)1) y si es indeterminado es LD. (admite soluciones no triviales)

Def Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito se llama rango del conjunto A a la mayor cantidad de elementos de A que forman un conjunto LI.

Def Rango de una matriz: Sea una matriz $A_{m \times n}$ se define

1. Rango por filas de A (rango$_f$(A)) como el rango del conjunto $\{A_1, A_2 \cdots A_m\}$ formado de filas de A.
2. Rango por columnas de A (rango$_c$(A)) como el rango del conjunto $\{A^1, A^2 \cdots A^n\}$ formado por columnas de A.

Teorema (Tm) Sea $A_{n \times n} \Rightarrow$ rango$_f$(A) = rango$_c$(A)

(*)1 Solución trivial: $Sol(S) = \{(0, 0, \cdots, 0)\}$