Apuntes 2 - Matriz inversa

Definición (Def): Sea A matriz $n \times n$. Se dice que la matriz A es invertible $\stackrel{(*)1}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ B matriz $n \times n$ / $A.B = \mathbb{I}dn$ y $B.A = \mathbb{I}dn$, con $\mathbb{I}dn$ matriz identidad de $n \times n$.

Observación (obs): • Si A es invertible conmuta con su inversa
• B es única y se denomina matriz inversa.

Proposición (Pp.) Sean A y B dos matrices $n \times n$ invertibles $\Rightarrow$ $A.B$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Para calcular la matriz inversa se estudian dos métodos, método 1 por definición (mediante determinante) y el método 2 (mediante transformaciones elementales.

Método 1

Previos

Def Sea A matriz de $n \times n$, se define matriz adjunta del elemento a_{ij} como la submatriz Ad_{ij} que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

Ejemplo (Ej): $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $Ad_{21} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

lugar 21
columna 1, fila 2

Def La definición de determinante es por recursión Es decir es necesario definir determinante para matrices de tamaño 1×1, 2×2 y luego $n \times n$

(*)1 Símbolo matemático sí sólo si

Escaneado con CamScanner

• Sea A matriz de 1×1, $A = (N)$ => su determinante Ap 2 - H_2

$|A| = N$

• Sea A matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ => su determinante

$|A| = ad - bc$

• Sea A matriz de $n\times n$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ => su determinante

$|A| = (-1)^{1+J} a_{1J}.|Ad_{11}| + \cdots + (-1)^{i+J}.a_{iJ}|Ad_{iJ}| + \cdots + (-1)^{n+J}.a_{nJ}.|Ad_{nJ}|$
siendo J cualquier columna de A, $J \in 1 \cdots n$

Ej 1: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ $|A| = 3 2 - 1.7 = 6 - 7 = -1$

Ej 2: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = (-1)^{1+1}.3.\left|\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right| +$

$(-1)^{2+1}.(-1).\left|\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{3+1}.(-2).\left|\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\right|$

$\Rightarrow |A| = 3.\left|\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right| + 1\left|\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right| - 2.\left|\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\right|$

$\Rightarrow |A| = 3.(2.0 - 4.7) + 1.((-1).(0) - (-3)(4))$
$- 2((-1)(7) - (-3)(2)) = 3(-28) + 1.(12) - 2(-1)$

$|A| = -84 + 12 + 2 = -70$ (se desarrolló por la primera columna)

Propiedades de determinantes.

Obs. No se cumple que $|A+B| = |A| + |B|$

① Homogeneidad (respecto a una fila): Si $B_{n\times n}$ es una matriz que surge de multiplicar una de las filas de $A_{n\times n}$ por α / $\alpha \in \mathbb{R}$

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha . a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha |A|$$

Corolario (Cr): Se deduce que $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

② Intercambio de filas Si $B_{n\times n}$ se obtiene de intercambiar dos filas de $A_{n\times n}$ $\Rightarrow |B| = -|A|$

③ Determinantes nulos

- Si $A_{n\times n}$ tiene fila de ceros $\Rightarrow |A| = 0$
- Si $A_{n\times n}$ tiene dos filas iguales $\Rightarrow |A| = 0$
- Si $A_{n\times n}$ tiene dos filas proporcionales entre ellas $\Rightarrow |A| = 0$
- Si $A_{n\times n}$ tiene una fila / $F_e = \lambda F_i + \beta F_k$, F_i y F_k filas de A, i y $k \in 1 \cdots n$ $i \neq e$, $k \neq e$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| = 0$

Obs. Se dice que F_e es combinación lineal de F_i y F_k.

④ Combinación lineal de filas

- Si B se obtiene sumando a una fila de A un múltiplo de otra fila de A $\Rightarrow |B| = |A|$
- Si B se obtiene cambiando la fila A_j de $A_{n\times n}$ por $\beta A_j + \alpha A_i \Rightarrow |B| = \beta |A|$, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ $j, i \in 1 \cdots n$.

Nota: La definición y propiedades de determinantes se enunciaron para filas pero valen para columnas también. Porque se cumple $|A| = |A|^t$.

Teorema (Tm): Sean dos matrices $n\times n$ se cumple: $|A.B| = |A||B|$

Escaneado con CamScanner

Def • Se define cofactor de un elemento a_{ij} de una matriz $n \times n$ como $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |Ad_{ij}|$

• Se define matriz de cofactores de A como

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Forma de cálculo de A^{-1} por método 1:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left[Cof(A) \right]^t$$

Propiedad $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A^{-1}?

Paso 1: Construir la matriz de cofactores

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (0.0 - 1.1) = -1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1 \cdot (1.0 - 1.0) = 0$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (1.1 - 0.0) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1 \, (1.0 - 0.1) = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (1.0 - 0.0) = 0$$

Escaneado con CamScanner

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1 . (1(1) - 1.0) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1(1.1 - 0.0) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1.(1.1 - 0.1) = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot (1.0 - 1.1) = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Trasponer matriz de cofactores

$$\operatorname{cof}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Realizar el determinante de A

Se desarrolla en la primera columna.

$$|A| = (-1)^{1+1}.(1). \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}.(1) \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{3+1}.0. \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$|A| = 1.(1).(0.0 - 1.1) + (-1)(1)(1.0 - 0.1) + (1)(0)(1.1 - 0.0)$$

$$|A| = -1 + 0 + 0 = -1$$

Paso 4: Utilizar fórmula para A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs: Se puede multiplicar $A^{-1}.A$ o $A \cdot A^{-1}$ y verificar que resulta la matriz identidad.

Escaneado con CamScanner

Método 2

Previos

Def Se llaman transformaciones elementales a cualquiera de las siguientes operaciones efectuadas a las filas de una matriz $A_{m \times n}$:

1. Intercambiar dos filas de lugar, $F_i \leftrightarrow F_j$
2. Multiplicar una fila por un número $\alpha \in \mathbb{R} / \alpha \neq 0$, αF_i
3. Sumar a una fila un múltiplo otra $F_i + \alpha F_j$

Obs. La transformación elemental tipo 3 no cambia el determinante de la matriz. Las otras, de tipo 1 y tipo 2 sí lo cambian.

Forma de cálculo de A^{-1} por método 2

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A^{-1} ?

Paso 1: Extender la matriz con la matriz identidad de mismo tamaño:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2 Aplico transformaciones elementales hasta obtener la matriz identidad del lado izquierdo

- $$F_2 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ TE de tipo 3

- $$F_2 + F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ TE de tipo 3

Escaneado con CamScanner

- $F_2 - F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ TE de tipo 3

- $F_1 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ TE tipo 3

- $-F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ TE tipo 2

Paso 3: A^{-1} está del lado derecho.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs El resultado de A^{-1} es el mismo por los dos métodos.

Escaneado con CamScanner