Ap. 1 - Matrices

Las matrices serán una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones. Para entender un poco este objetivo se dan ejemplos y la definición.

Ejemplo 1: (Ej.)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 2y + z = 8 \\ z = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

(Def.)
Definición: Un sistema de ecuaciones lineal de m ecuaciones con n incógnitas $x_1, x_2 \dots x_n$ es un problema de tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_n + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} particular

donde a_{ij} con $i = 1 \dots m$ y $j = 1 \dots n$ son coeficientes del sistema y b_i términos independientes

Matrices

Ej. 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Ej 2: $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ Ej 3: $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 6 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Def. Se llama matriz A de m filas por n columnas $(m \times n)$ de entradas a_{ij} a un ordenamiento rectangular de números: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ → a_{ij} particular

Observación: El primer índice i de a_{ij} indica la fila. El segundo j indica la columna. Ap1-H2
(Obs.)

Def. Dado un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Se llama matriz del sistema a la matriz A de $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Se llama matriz ampliada del sistema a la matriz $A|b$ de $m \times (n+1)$:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 1: Sea el sistema $S = \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

La matriz de S y la matriz ampliada de S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Operaciones con matrices. Ap 1-H3

Suma

Def: Sea A y B dos matrices $m \times n$, se define la suma

$+: \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$ ⊛1 de modo que $A+B=C \,/$ ⊛2

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ej 1: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{⊛3}{\Rightarrow} C = \begin{pmatrix} \sqrt{5}+\sqrt{2} & \pi - 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Obs. La matriz resultado tiene mismas dimensiones que las matrices que se suman.

Multiplicación de un número por una matriz

Def: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ⊛4 y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define multiplicación de λ por A como $\lambda A = B$ donde $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Ej 1: $\lambda_1 = 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ej 2: $\lambda_2 = \sqrt{2}$ $A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Propiedades de suma y producto por un número

- Conmutativa $A+B = B+A \quad \forall$ ⊛5 $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$
- Asociativa $(A+B)+C = A+(B+C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$

⊛1 Espacio de matrices de $m\times n$, contiene a todas las matrices de tamaño genérico $m \times n$.

⊛2 símbolo matemático de tal que, /

⊛3 " " de entonces, $\Rightarrow$

⊛4 " " de pertenece, $\in$

⊛5 $\forall$ símbolo matemático de para todo.

Escaneado con CamScanner

• Neutro de la suma. $\exists\, \mathbb{O} \in \mathcal{M}_{m\times n} / A + \mathbb{O} = A$ · A1 – A4

existe matriz nula.

$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

• Existencia opuesto: Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\exists B \in \mathcal{M}_{m\times n} /$

$$A + B = \mathbb{O} \quad (B = -A)$$

• Asociativa de la multiplicación: $(\alpha . \beta) A = \alpha (\beta A)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

• Neutro de la multiplicación: Se cumple $1 . A = A$ con $1 \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

• Distributiva en la suma: $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

• Distributiva en la multiplicación: $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

Producto de matrices

Def Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$ se define el producto entre matrices como $\bullet : \mathcal{M}_{m\times p} \times \mathcal{M}_{p\times n} \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$ de modo que $A . B = C / c_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} . b_{hj}$ (*1) con $i: 1 \dots m$ y $j: 1 \dots n$

Forma de realizar la operacion

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \boxed{a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip}} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

(*1): Símbolo de sumatoria se suman todas las componentes, cambiando h por los números del 1 a p.

Ej 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x2}$ Ap1-H5

$\Rightarrow$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(1)+(-1)(-1) & 2(2)+(-1)(3) \\ 0(1)+2.(-1) & 0(2)+(2)(3) \end{pmatrix} = C$

$C = \begin{pmatrix} 2+1 & 4-3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{2x2}$

Ej 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x4}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2x2} = C$

Obs 1: Las matrices no tienen que ser del mismo tamaño para poder multiplicarse. Deben ser conformables. Es decir la cantidad de columnas de A debe ser igual a la cantidad de filas de B.

Obs 2: El producto entre matrices no es conmutativo. Un contraejemplo es el siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A.B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C_1$

y

B.A $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_2$

$\Rightarrow C_1 \neq C_2$.

Ap1 - H6

Propiedades del producto entre matrices.

- Asociativa: Sean A, B, C tres matrices conformables $\Rightarrow$

$$(A.B).C = A(B.C)$$

- Distributiva: Sean A y B conformables de misma dimensión (para poder sumarse) y C conformable con A y B. $\Rightarrow$

$$C(A+B) = CA + CB \quad y \quad (A+B)C = AC + BC$$

Matrices notables.

Matriz traspuesta

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ donde $i: 1 \dots m$ y $j: 1 \dots n$. Se define la matriz traspuesta $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ como:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11}^t & a_{12}^t & \cdots & a_{1m}^t \\ a_{21}^t & a_{22}^t & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{nm}^t & \cdots & & a_{nm}^t \end{pmatrix}$$

con $a_{ij}^t = a_{ji}$ (de la matriz original)

Ej 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ej 2: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Obs. Como $B = B^t$ se le llama matriz simétrica a B.

Ej 3: $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obs Como $C = -C^t$ se le llama matriz antisimétrica

Propiedades matriz traspuesta. $A_p - \#_7$

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda . A^t$
- $(A.B)^t = B^t A^t$
- $(A^t)^t = A$

Matriz identidad

Def Se llama matriz identidad $\mathbb{I}d_n \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a

$$\mathbb{I}d_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Obs Se cumple $\mathbb{I}d_n A = A \mathbb{I}d_n = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Matriz nula

Def Se llama matriz nula $\mathbb{O}_{m\times n}$ a:

$$\mathbb{O}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$