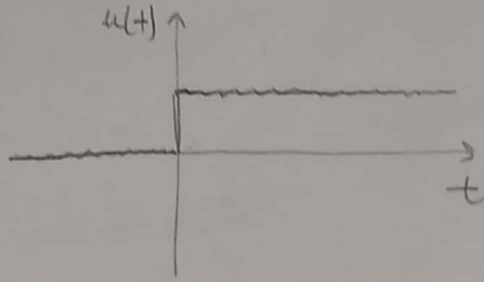
Apuntes 9

M2T
H1

Transformada de Laplace

→ Herramientas previas

⊛ Escalón de Heaviside (función discontinua en $t=0$)



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Obs No importa si en $t=0$ $u(0)=0$ o $u(0)=1$, sí importa que esté definida.

⊛ Integral de funciones exponenciales

(Límite) tiende

$$\to \int_0^{\infty} e^{t}\,dt = e^{t}\Big|_0^{\infty} = e^{\infty} - e^{0} = e^{\infty} - 1 \qquad e^{+\infty} \to +\infty$$

⇒ La integral diverge

no resulta un número finito

regla de la cadena

$$\to \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = -\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) = -\left(\frac{1}{e^{+\infty}} - e^{0}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right), \text{ como } e^{\infty} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$$

$$\to \int_0^{\infty} e^{-kt}\,dt = \frac{1}{-k} e^{-kt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-k}\left(e^{-k\infty} - e^{-k.0}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right)$$

$k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$ — si $k>0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-kt}\,dt = -\frac{1}{k}\cdot(0-1) = \frac{1}{k}$$

¿qué pasa si $k<0$?

Teníamos

$$I = -\frac{1}{k}\left(e^{-k\infty} - e^{-k0}\right)$$ pero ahora $-k$ tiene signo positivo

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{k}\left(e^{+\infty} - 1\right)$$ y la integral diverge

A9

M21
H2

⊛ Definición Transformada de Laplace (TdL)

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

con $s \in \mathbb{C}$, es decir $s = \sigma + i\omega$, donde $Re(s) = \sigma$ y $Im(s) = \omega$

"se le aplica la transformación a una función $x(t)$, x es la función y t es la variable"

⊛ A efectos de la integral es una constante. pero es un número complejo que a priori no conozco

Ejemplo1:

$x(t) = e^{-at} u(t)$ con $a > 0$ $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot e^{-st}\, dt \underset{\text{junto las exponenciales}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-(a+s)t}\, dt =$$

el escalón hace el integrando $= 0$ para tiempos negativos

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{-(s+a)}\, e^{-(s+a)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{(s+a)} \left[e^{-(s+a)\infty} - 1 \right]$$

Diverge o converge? hay que estudiar más la expresión $e^{-(s+a)t}$ $\Rightarrow$

$$s + a = \overbrace{\sigma + a}^{\text{parte real}} + \underbrace{i\omega}_{\text{parte compleja}} \Rightarrow e^{-(s+a)t} = e^{-(\sigma+a+i\omega)t} \underset{\text{los puedo separar}}{=}$$

$e^{-(\sigma+a)t} \cdot e^{-i\omega t} \rightarrow$ este complejo tiene módulo 1

($z = Re^{i\theta}$, R es el módulo y θ el ángulo)

A la hora de forzar que la integral no tienda a infinito nos importa **sólo** que el módulo sea finito $\Rightarrow$ queremos que $e^{-(a+\sigma)t}$ no tienda a infinito $\Rightarrow$ para eso $a+\sigma>0$

$\Rightarrow \sigma > -a \Rightarrow Re(s) > -a$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(x(t))} = \frac{1}{-(a+s)}\left[\frac{1}{e^{+(a+\sigma)\infty}e^{+i\omega\infty}} - 1\right] = \boxed{\frac{1}{(a+s)} \quad \text{si } Re(s)>-a}$$

tiende a $\rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{e^{+(a+\sigma)\infty}} \longrightarrow 0$

Observaciones:

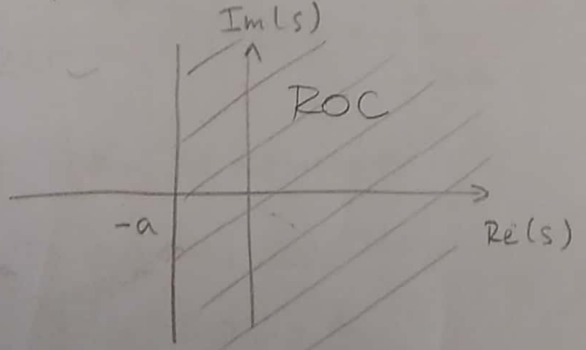
- $\mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{a+s}$ es una función que depende de s

$\Rightarrow$ como notación $\mathcal{L}(x(t)) \overset{\text{notación}}{=} X(s)$ $\Rightarrow$ si tenemos una señal en el tiempo y se la aplica la TdL se obtiene una función compleja $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$

- Definición: La TdL tiene asociada una región de convergencia (RoC) que es la región del plano complejo donde la trasformada converge.

Ejemplo en el caso anterior $X(s) = \frac{1}{s+a}$, $Re(s)>-a$

$\Rightarrow$



A9 M2T H4

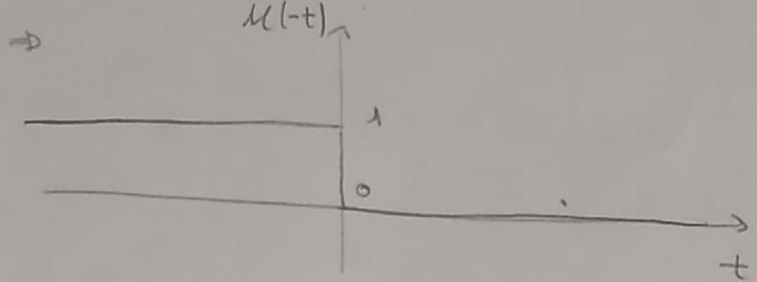
Ejemplo 2: $x(t) = -e^{-at} u(-t) \quad a>0 \quad a \in \mathbb{R} \quad X(s)?$

primero quien es $u(-t)$ $\Rightarrow$ en $t=1$ $u(-1)=0$

en $t=-3$ $u(-(-3)) = u(3) = 1$ en $t=2$ $u(-2)=0$.

en $t=-5$ $u(-(-5)) = u(5) = 1$ ⊛ multiplicar por -1 la variable espeja la imagen.

$\Rightarrow$



→ anula el integrando de tiempos positivos

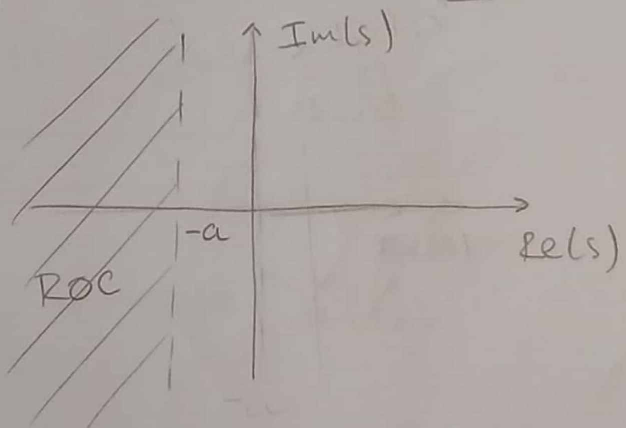
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t} dt$$

$$= -\frac{1}{-(a+s)} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a+s} \left[e^{-(a+s)0} - e^{-(a+s)(-\infty)} \right]$$

$$= \frac{1}{a+s} \left[1 - e^{(a+s)\infty} \right]$$ Ahora para que no se vaya a infinito $Re(a+s) < 0 \Rightarrow a + \sigma < 0 \Rightarrow \sigma < -a$

$\Rightarrow Re(s) < -a \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) < -a$ igual expresión de transformada, ROC distinta $\Rightarrow$ no es la misma transformada:

$$\mathcal{L}(-e^{-at} u(-t)) = \frac{1}{s+a}$$



⊛ La ROC determina la transformada, no hay TdL sin ROC.

Ejemplo 3: $x(t) = 3e^{-2t} u(t) - 2e^{-t} u(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[3e^{-2t} - 2e^{-t} \right] u(t) e^{-st} dt$$

A9 M2T HS

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty (3e^{-2t} - 2e^{-t})e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \left[3e^{-(2+s)t} - 2e^{-(s+1)t}\right]dt$$

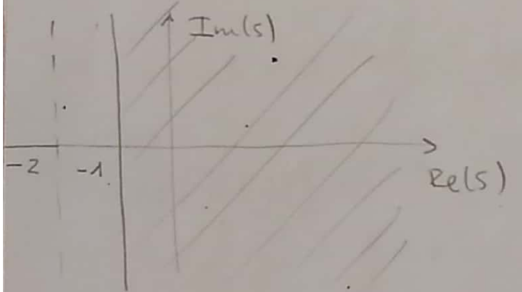
iguales a las anteriores ⇒ separo las integrales por linealidad

$$= 3\int_0^\infty e^{-(2+s)t}\,dt - 2\int_0^\infty e^{-(s+1)t}\,dt = \frac{3}{-(s+2)}e^{-(s+2)t}\Big|_0^\infty - \frac{2}{-(s+1)}e^{-(s+1)t}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{3}{-(s+2)}\left[e^{-(s+2)\infty} - 1\right] + \frac{2}{(s+1)}\left[e^{-(s+1)\infty} - 1\right]$$

para que tienda a cero $Re(s) > -2$ y para que tienda a cero $Re(s) > -1$ } el más restrictivo es que $Re(s) > -1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\left[3e^{-2t} - 2e^{-t}\right]u(t)\right) = \frac{3}{(s+2)} + \frac{-2}{(s+2)}, \quad Re(s) > -1$$



Ejemplo 4: $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)\,u(t)$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\left(\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2}\right)u(t)$$

cambio a exponenciales fórmula de Euler

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}\left(e^{-(1-3i)t} + e^{-(1+3i)t}\right)\right]u(t)$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-2t} + \frac{1}{2}\left(e^{-(1-3i)t} + e^{-(1+3i)t}\right)\right]\cdot e^{-st}u(t)\,dt$$

$$= \int^{\infty}\left(e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3i)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3i)t}\right)e^{-st}\,dt$$

A 9 M2T

H6

$\Rightarrow$ Lo podemos dividir en tres integrales.

$$\mathcal{L}(x(t)) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-(2+s)t}\,dt}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-(1-3i+s)t}\,dt}_{I_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-(1+3i+s)t}\,dt}_{I_3}$$

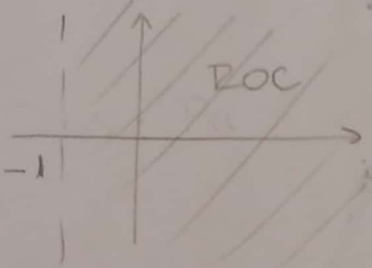
$I_1 = \dfrac{1}{s+2}$, $Re(s) > -2$ (ya la hicimos, ejemplo 1 con $a = 2$)

$I_2 = \dfrac{1}{-2(1-3i+s)}\left[e^{-(1-3i+s)\infty} - 1\right]$ $\Rightarrow$ Necesito $Re(1-3i+s) > 0$
$1 + \sigma > 0 \Rightarrow Re(s) > -1$

$I_2 = \dfrac{1}{2(1-3i+s)}$, $Re(s) > -1$

$I_3 \rightarrow$ análoga totalmente a I_2 $I_3 = \dfrac{1}{2(1+3i+s)}$, $Re(s) > -1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2(1-3i+s)} + \frac{1}{2(1+3i+s)}$$



Obs El resultado de la TdL es una determinada descomposición en fracciones simples $\Rightarrow$ Teniendo la TdL podemos ver quién era $x(t)$.

Ejemplo 5: $x(t) = e^{-b|t|}$ $\Rightarrow$ para valores positivos $|t| = t$
" " negativos $|t| = -t$

$\Rightarrow x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$

Propiedad: La TdL es lineal:

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}]{} a\,X_1(s) + b\,X_2(s)$$

M21 H7

$$\Rightarrow \mathcal{L}\underbrace{\left(e^{-bt}u(t)+e^{+bt}u(-t)\right)}_{X(s)} = \underbrace{\mathcal{L}\left(e^{-bt}u(t)\right)}_{X_1(s).} + \underbrace{\mathcal{L}\left(e^{bt}u(-t)\right)}_{X_2(s)}$$

$X_1(s) \rightarrow$ ya lo hicimos (E1)

$$X_1(s) = \frac{1}{s+b} \quad \text{con } Re(s) > -b$$

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{bt} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-b)t} dt = \left.\frac{e^{-(s-b)t}}{-(s-b)}\right|_{-\infty}^{0}$$

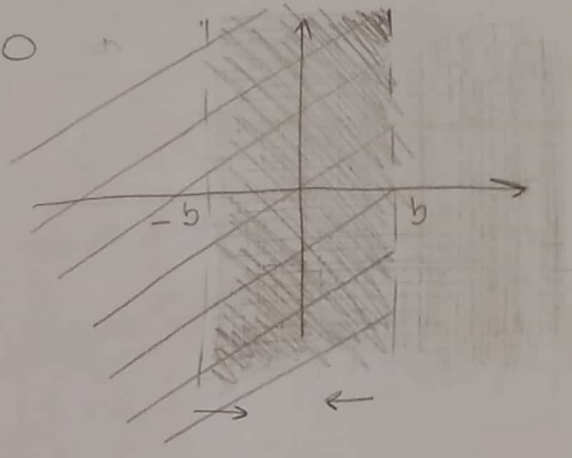
$$= \frac{1}{-(s-b)}\left[1 - e^{+(s-b)\infty}\right] \rightarrow \text{Necesito } Re(s-b) < 0$$

$\Rightarrow Re(s) < b$.

$$\Rightarrow X(s) = \underset{Re(s)>-b}{\frac{1}{s+b}} - \underset{Re(s)<b}{\frac{1}{s-b}} \rightarrow$$

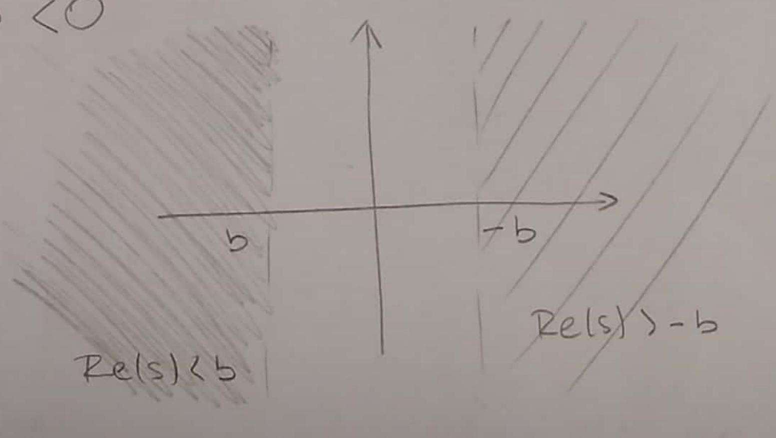
ROC ? casos separados si b positivo o negativo

si $b > 0$



$\Rightarrow$ ROC $-b < R(s) < b$

si $b < 0$



$\Rightarrow$ Las ROC <u>no</u> coinciden

<u>NO</u> Hay Transformada de Laplace

A9 M2T #8

Propiedad: Diferenciación en S $-t\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}e} \frac{dX(s)}{ds}$ ⊛

Por ejemplo $\mathcal{L}e(t e^{-at} u(t)) \Rightarrow$

como $\mathcal{L}e(e^{-at} u(t)) = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) > -a$ y $\frac{dX(s)}{ds}$?

$\left(\frac{1}{s+a}\right)' = -\frac{1}{(s+a)^2} \Rightarrow$ falta el signo de menos ⊛

pero como la trasformada es lineal la propiedad puede ser usada $t\,x(t) \longleftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}e(t e^{-at} u(t)) = -\left[\frac{-1}{(s+a)^2}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$ con $Re(s) > -a$

⊛ Cómo averiguar $x(t)$ si tenemos $X(s) \Rightarrow$

Ejemplo: $X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$

① Aplico fracciones simples:

$$\frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

multiplico por $(s+2)$

$$\Rightarrow \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)A}{(s+1)^2} + \frac{(s+2)B}{(s+1)} + C$$ en $s=-2$

$$\frac{2(-2)^2+5(-2)+5}{(-1)^2} = 0 + 0 + C \Rightarrow \frac{8-10+5}{1} = C$$

$C=3 \Rightarrow$ procedimiento de fracciones simples finalizado: $\frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}$

Escaneado con CamScanner

A9

$X(s) = \underbrace{\frac{2}{(s+1)^2}}_{X_1(s)} - \underbrace{\frac{1}{(s+1)}}_{X_2(s)} + \underbrace{\frac{3}{(s+2)}}_{X_3(s)}$ quien es $x(t)$?

Empezamos con los más fáciles.

$x_3(t)$? $X_3(s) = 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{s+2}\right)}_{Y_3(s)} \overset{\text{porque}}{\Rightarrow}$ TdL lineal $x_3(t) = 3\, y_3(t)$

$y_3(t) = e^{-2t} u(t)$

$\Rightarrow x_3(t) = 3 e^{-2t} u(t)$

$x_2(t)$? $X_2(s) = -1 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{s+1}\right)}_{Y_2(s)} \overset{\text{linealidad}}{\Rightarrow} x_2(t) = -1\, y_2(t)$

$y_2(t) = e^{-t} u(t) \cdot \Rightarrow x_2(t) = -e^{-t} u(t)$

$x_1(t)$? $X_1(s) = 2 \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2}}_{Y_1(s)} \Rightarrow x_1(t) = 2\, y_1(t)$

$Y_1(s) = \frac{d}{ds} \underbrace{\left(\frac{-1}{(s+1)}\right)}_{X_2(s)} \rightarrow$ por propiedad anterior $y_1(t) = -t\, x_2(t)$

$\Rightarrow y_1(t) = e^{-t} u(t)$

$\Rightarrow x_1(t) = 2 e^{-t} u(t) \Rightarrow x(t) = \left[2e^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}\right] u(t)$