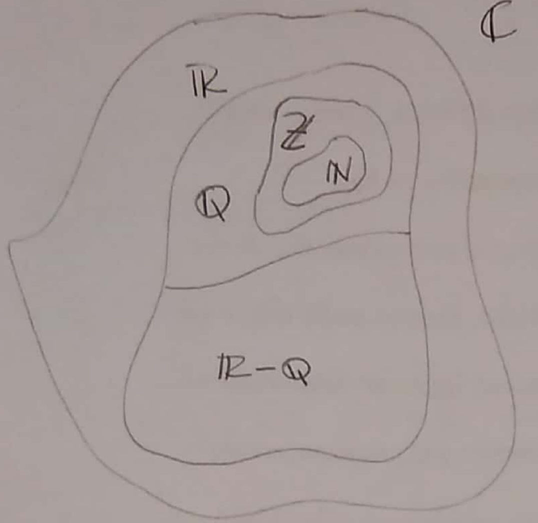
Apuntes 0-Repaso

Clase de números



En este esquema se presentan los números complejos ($\mathbb{C}$), los reales ($\mathbb{R}$) que están incluídos en los complejos. Los reales se componen de los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{R}-\mathbb{Q}$). Dentro de los racionales, se encuentran los enteros ($\mathbb{Z}$) y dentro de los enteros se encuentran los naturales.

Obs. Los complejos se estudiarán en la segunda perte del curso.

Ejemplos:

- $x_1 = 3$: Es real, racional (porque se puede ver como $x_1 = 3/1$), entero y natural.
- $x_2 = \pi$ es real e irracional porque no se puede escribir como fracción. No se debe confundir los irracionales con números con infinitas cifras despúes de la coma. Existen racionales e irracionales con esta caracte-rística. Por ejemplo: $x_2 = 3{,}1416\cdots$ y $x_3 = 0{,}333\cdots$
- $x_3 = 3/10$: Es real, racional pero no es entero. Por ende tampoco puede ser natural
- $x_4 = -6$: Es real, racional (se puede escribir $-6/1$), es entero, pero no natural.

Escaneado con CamScanner

Operaciones con fracciones ApO - H2

→ Suma de fracciones

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, siendo a, b, c y d $\in$ ⊛1 $\mathbb{R}$ y b, d distintos de cero. En una fracción a/b a es el numerador y b el denominador.

Ejemplo1: $2/3 + 7/5$

• Primero, se debe obtener denominadores iguales (denominador común). Muchas veces lo más práctico es multiplicar los denominadores entre sí. Como $3 \times 5 = 15$ Entoces 15 es un denominador común.

• Segundo, si cambian los denominadores, deben cambiar los numeradores para mantener la razón ⊛2.

$\frac{2.5}{3.5} + \frac{7.3}{5.3}$ } Obs. Los denominadores resultan 15 y los numeradores se multiplican por el mismo número que se utilizo en el denominador.

• Tercero, se hacen operaciones $\frac{10}{15} + \frac{21}{15} = \frac{10+21}{15}$

• Cuarto, se suman los numeradores $\frac{31}{15}$, listo!

⊛1 $\in$ es el símbolo de pertenece $a \in \mathbb{R}$, significa que a pertence a los reales.

⊛2 Se tiene la mitad de una torta ($1/2$) y se quiere expresar la misma fracción con otro denominador (ej. 4). Si sólo se multiplica el denominador está mal ($\frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$) porque se tiene sólo un cuarto de torta. Se debe mutiplicar el numerador por el mismo número ($\frac{1.2}{2.2} = 2/4$) para tener misma centidad de torta

Ejemplo 2: $\frac{3}{5}+\frac{40}{25}$ 	ApO - H3

En este caso no conviene mutiplicar los denominadores entre sí para encontrar un denominador común. Si se multiplica 5.5 resulta 25 y la otra fracción resulta sin cambios.

$$\frac{3.5}{5 5}+\frac{40}{25}=\frac{15+40}{25}=\frac{55}{25}$$

En cambio mutiplicando los denominadores entre sí se tiene: $\frac{3.25}{5.25}+\frac{40.5}{25.5}=\frac{75}{125}+\frac{200}{125}=\frac{275}{125}$

(*) Por qué los resultados aperentan distintos?

Se deben simplificar las fracciones, dividiendo numerador y denominado entre el mismo número, manteniendo la razón. Entonces: $\frac{275/5}{125/5}=\frac{55}{25}$.

Obs. $\frac{55}{25}$ también se puede simplificar $\frac{55/5}{25/5}=\frac{11}{5}$

(*)1 $\Rightarrow \frac{275}{125}, \frac{55}{25}$ y $\frac{11}{5}$ son el mismo número.

Para concluir $\frac{3}{5}+\frac{40}{25}=\frac{11}{5}$.

Ejemplo 3: $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=\frac{2.4}{7.4}+\frac{3.7}{4.7}=\frac{8+21}{28}=\frac{29}{28}$

(*)1 $\Rightarrow$ significa entonces en simbología matemática.

Este resultado no se puede simplificar porque no hay un número entero que divida sin resto a 28 y 29 que no sea 1

→ Resta de fracciones

- Primero, se encuentra un denominador común.
- Segundo, se realiza resta de los numeradores.
- Tercero, se puede simplificar el resultado.

Ejemplo 1: $3/4 - 5/12 = \frac{3.3}{4.3} - \frac{5.3}{12} = \frac{9-15}{12}$

$\Rightarrow \frac{-6}{12}$, que se puede simplificar:

$\frac{-6/2}{12/2} = \frac{-3}{6}$ y simplificar en $\frac{-3/3}{6/2} = -1/3$

Para concluir $3/4 - 5/12 = -1/3$

→ Multiplicación de fracciones

Consiste en mutiplicar denominadores entre sí y numeradores entre sí

Ejemplo 1: $\frac{3}{5} . \frac{40}{25} = \frac{120}{125}$, simplificando $\frac{120/5}{125/5} = \frac{24}{25}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{7} . \frac{16}{3} = \frac{32}{21}$, no se puede simplificar

→ División de fracciones

Para la división se debe "multiplicar el dividendo por el inverso del divisor" y luego multiplicar el resultado.

Ejemplo 1: $\frac{3/4}{2/5}$ → dividendo (3/4) → divisor (2/5) A_pO - Hs

- $\frac{3}{4}\ \frac{5}{2}$ → inverso del divisor, se mutiplica estas fracciones, resultando $\frac{15}{8}$

Ejemplo 2: $\frac{10/3}{22/5} = \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{22} = \frac{50}{66}$, se puede simplificar

$\Rightarrow \frac{50/2}{66/2} = \frac{25}{33} \quad \Rightarrow \frac{10/3}{22/5} = \frac{25}{33}$

Potencias

- El producto de un mismo número o variable (*)1 realizado repetidas veces se llama potencia.

Ejemplo 1: $2.2.2.2 = 2^4 = 16$ el exponente es 4 y la base es 2.

Ejemplo 2: $x.x.x = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ el exponente es 3 y la base es x.

- Cuando se tiene una potencia con un exponente racional y no entero (ejemplo $5/2$) se debe hacer lo siguiente:

Ejemplo 1: $3^{5/2} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{3.3.3.3.3} = \sqrt[2]{243}$,

Ejemplo 2: $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

Ejemplo 3: $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3.3.3} \Rightarrow$ Un número que multiplicado 3 veces por sí mismo resulta 27 es 3 porque $3.3.3 = 27. \Rightarrow 27^{1/3} = 3$.

(*)1 Variable es una letra que representa cualquier número

Escaneado con CamScanner

Obs: • Cuando se tiene $\left(\frac{3}{10}\right)^2$, es distinto ApO - H6

a $\frac{3^2}{10}$ o a $\frac{3}{10^2}$. En el primer caso $\frac{3^2}{10^2} = \frac{9}{100}$, en el segundo $\frac{9}{10}$ y en el tercero $\frac{3}{100}$ $\Rightarrow$ $\frac{9}{100} \neq \frac{9}{10} \neq \frac{3}{100}$

• Cuando se tiene $\sqrt{9/25}$ es distinto a $\frac{\sqrt{9}}{25}$ o a $\frac{9}{\sqrt{25}}$

en el primer caso $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$, distinto a $\frac{3}{25}$, distinto a $\frac{9}{5}$.

Propiedades distributiva de los números reales

→ Propiedad distributiva: sean $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Obs: Los paréntesis tienen un significado. Por ejemplo $-3(x-2) = -3x + 6$, el 3 multiplica la x y el -2.

Polinomios

Un polinomio es una función,(*)1 que se compone de sumas de potencias de cierta variable.

Por ejemplo: $x^5 - 3x^4 + x^2 + 2x - 4 = p(x)$, tiene variable x, $x \in \mathbb{R}$. A cada término de la suma se le llama monomios. El grado de cada monomio lo determina el exponente del monomio. El grado más alto entre los monomios es el grado del polinomio. El número que multiplica potencia de la variable se llama coeficiente del monomio.

(*)1 Se debe definir función pero se verá más adelante en el curso

En $p(x) \longrightarrow x^5$ es un monomio de coeficiente ApO-H7
$1\ (1 . x^5)$ de grado 5.

$\longrightarrow -3x^4$ monomio de coef. 3 de gr. 4

⋮

$\longrightarrow -4$ monomio de coef. -4 y gr. 0 es lo mismo que $-4x^0$ (cualquier número elevado a la cero es $1^{⊛1}$) y lo mismo que $-4 . 1$

A este término se lo denomina término independiente

Propiedad: Sólo monomios de mismo grado se pueden sumar o restar.

Ejemplo 1: $7x - 3 + x - 2x + 6x^2 = 6x^2 + 6x - 3$

Propiedad: Monomios de cualquier grado se pueden multiplicar y dividir. Primero se mutiplican o se dividen los coeficientes y se suma o se resta los exponentes (según corresponda)

Ejemplo 1: $(3x^5)(10x^3) = 30x^8$

Ejemplo 2: $\dfrac{35x^2}{⊛_2\ 7x} = 5x$

Solución de ecuaciones sencillas:

Obs se explica mediante ejemplos por practicidad.

El objetivo es calcular x.

Ejemplo 1:
$6x - 2 = 6 - (4 - 4x)$ Sacar paréntesis
$6x - 2 = 6 - 4 + 4x$ simplificar monomios de mismo grado
$6x - 2 = 2 + 4x$

⊛1 $n \in \mathbb{R} \Rightarrow n^0 = 1$

⊛2 $x = x^1$, como cualquier número elevado a la 1 es sí mismo no se pone el exponente

Ap - H8

$$6x - 2 = 2 + 4x$$
$$6x - 4x = 2 + 2$$
$$2x = 4$$
$$x = 4/2$$
$$x = 2$$

Se separa términos con x de un lado y terminos sin x del otro.

Se opera

El número que multiplica a x pasa dividiendo

Se simplifica

Obs Se puede verificar el resultado en la ecuación inicial.

$$6(2) - 2 \overset{?}{=} 6 - (4 - 4(2))$$
$$12 - 2 \overset{?}{=} 6 - 4 + 8$$
$$10 \overset{\checkmark}{=} 10$$

operando

Ejemplo 2: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Se deben encontrar las raíces (*)1 del polinomio $\Rightarrow$ Se aplica "Báscara": Dado $p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_{raíz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.(a)}$

En este caso $x_{raíz} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

$\Rightarrow x_{raíz} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x_{raíz1} = \frac{2}{2} = 1$

$x_{raíz2} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow x = 1$ o $x = 2$ son solución de la ecuación

Productos notables

Expresiones que sirven para realizar ciertas potencias de sumas o restas de números reales.

Sea $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Estas expresiones se denominan productos notables

(*)1 Valores de x que cumplen que el polinomio sea igual a cero

Ejemplo 1: $(x-\sqrt{3})^2 = x^2 - 2x.(\sqrt{3}) + \sqrt{3}^2$ ApO - Ha

$(x-\sqrt{3})^2 = x^2 - 2(\sqrt{3})x + 3$

Ejemplo 2: $(x+2)^2 = x^2 + 2x(2) + 2^2$

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

Factorización de un polinomio

Es expresar un polinomio como mutiplicación de otros.

Ejemplo 1: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ Es el caso del tercer producto notable

Ejemplo 2: $6x^2 - x = x(6x-1)$ Para entender la igualdad sacar x de factor común en el lado izquierdo.

Obs. Aplicando propiedad distributiva en los polinomios factorizados se debe obtener el original.

Teorema (Se explicará más adelante en el curso, pero se usa desde ahora)

Se puede escribir un polinomio $p(x)$ con la siguiente factorización:

$p(x) = \mathbb{C}(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\gamma)$ siendo $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ y

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ raíces del polinomio $p(x)$.

Ejemplo 1: (Mismo polinomio que ejemplo 2 de ecuaciones)

$p(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow p(x) = 1(x-2)(x-1)$

Las raíces ya fueron calculadas

Obs: Utilizando la propiedad distributiva se puede verificar la igualdad