# Funciones en $\mathbb{R}^n$

M2T

4,

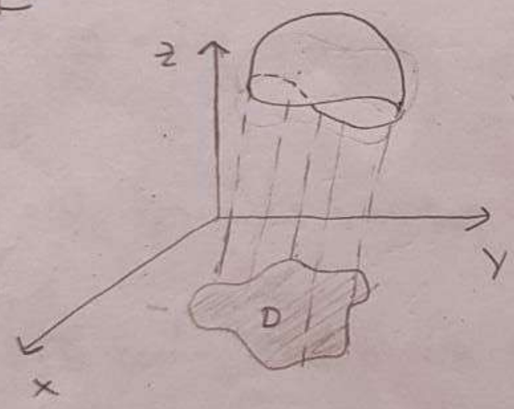
Las funciones tienen un dominio codominio y una regla que relaciona los dos anteriores.

Estudiaremos funciones con dominio en $\mathbb{R}^2$ y codominio en $\mathbb{R}^1$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ejemplos:

- $f_1(x,y) = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, norma de un punto
- $f_2(x,y) = 2x - 3y$
- $f(x,y) = e^{x^2 y} + \operatorname{sen}(x,y) + 1$

→ Gráfico de una función en $\mathbb{R}^2$: se debe trabajar en $\mathbb{R}^3$




- en el plano se representa el dominio y la altura para $f(x,y)$

- Gráfico de: $x^2+y^2$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2-y^2$ (silla de montar), visualizar en "Geogebra 3D online"

## Límites y Continuidad

Definición Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, una función $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de $D$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in B^*(a,\delta) \cap D \text{ se cumple } f(x) \in B(L,\varepsilon)$$

M2T
H2

Nociones:

* Definición: $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de un conjunto A $\Leftrightarrow$ Todo entorno reducido de a contiene algún punto de A. Es decir $\forall \varepsilon > 0$ se tiene

$B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Ejemplos:

① $A = [0,1)$, todos los puntos $[0,1]$ son de acumulación de A. (observar que el 1 es de acumulación pero no pertenece a A

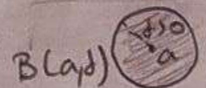
② $A = [0,1] \cup \{2\}$ todos los puntos $[0,1]$ son de acumulación. 2 está en A pero no es de acumulación

③ Si $A = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \}$ el único punto de acumulación es el cero y no está en el conjunto

④ ¿$A = \mathbb{N}$ quiénes son sus puntos de acumulación?

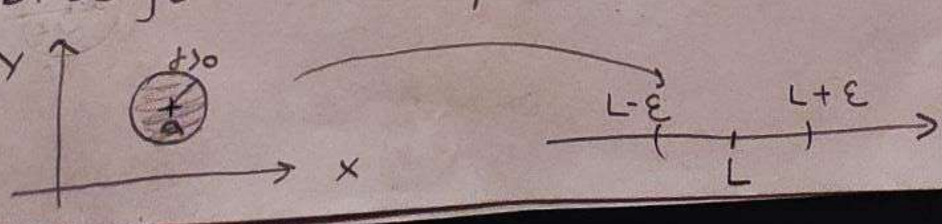
* Definición: Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R} / \delta > 0$
$\Rightarrow$ se llama bola abierta de centro a y radio $\delta$ al conjunto $B(a, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta \}$

$d(x,a)$: distancia entre los puntos.




$B^*(a, \delta)$: No se considera el punto a. (bola reducida)

* Dibujo de la definición de límite:



M2T
H3

Definición Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ una función $f: D \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de $D$, decimos que $f$ es continua en $a \iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in B(a, \delta) \cap D$ se cumple $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

Observación

① Si $a$ es punto de acumulación de $D \Rightarrow$

$$f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

② Si $a$ no es de acumulación de $D$ es un punto aislado ($\exists \delta > 0 /$ no hay puntos de $D$ en $B(a, \delta)$ $\Rightarrow f$ siempre es continua en estos puntos

Propiedades: Si $f$ y $g$ son dos funciones continua

① $f + g$ es continua en $a$

② $f \cdot g$ es continua en $a$

③ Si $g(a) \neq 0$ $\dfrac{f}{g}$ es continua en $a$.

Ejemplos de funciones continuas:

$$f_1(x, y) = e^x (x^2 + y^2)$$

$$f_2(x, y) = \text{Log}\, y + x^3 y$$

M2T
#4

## Derivabilidad en varias variables:

Aclaración: en este tema se omitirán conceptos de gran importancia como la diferenciabilidad en varias variables. Esto es por dos razones la complejidad del tema mencionado y el hecho de priorizar temas con aplicación práctica directa.

⊛ Definición: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0)$ un punto de $\mathbb{R}^2$. Definimos la derivada parcial respecto a la variable x en el punto $(x_0, y_0)$ como el siguiente límite (si existe):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Observar que es un límite en una variable (dejando el valor de y constante $y_0$).

⊛ La definición de derivada parcial en y es completamente análoga a la de x. $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Ejemplos:

① $f_1(x,y) = x^2 y + 5y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ ?

$\Rightarrow$ primero $f(x,1) = x^2 \cdot 1 + 5$,

segundo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x$

tercero $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$.

② $f_2(x,y) = x^2 y + y e^{2x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2y e^{2x}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + e^{2x}$

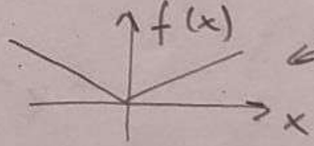
dejo y
como una constante

③ $f_3(x,y) = (y-x)^2 + x^2 y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y-x)(-1) + 2xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-x) + 2yx^2$

Observación: En una variable si $f(x)$ es derivable $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua. Puede ser continua y no derivable ( $f(x) = |x|$ )



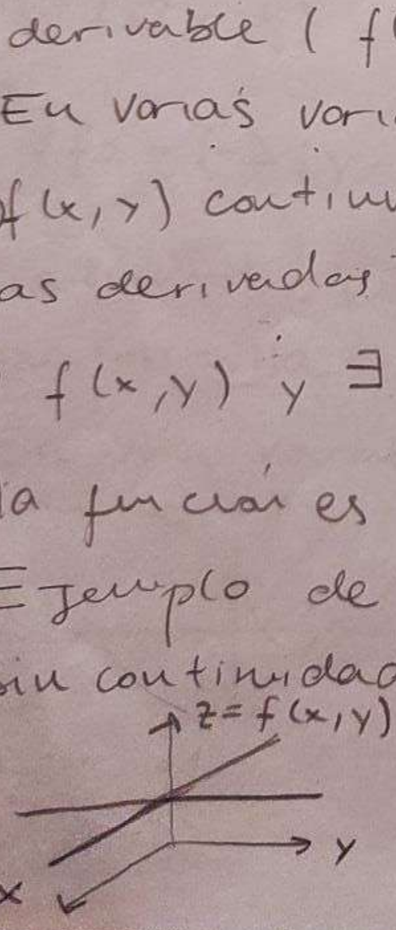

no es derivable en $x=0$

En varias variables si:

(*) $f(x,y)$ continua no necesariamente existen las derivadas parciales

(*) $f(x,y)$ y $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no necesariamente la función es continua

Ejemplo de $f(x,y)$ con derivadas parciales sin continuidad.




$f(x,0) = 1$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f(0,y) = 1$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pero $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ en un entorno de $(0,0)$ hay valores de $f(x,y)$ que valen cero y valores de $f(x,y)$ que valen uno.

⊛ Definición: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(x_0, y_0)$, $f$ diferenciable, definimos el vector gradiente de $f$ en $(x_0, y_0)$ $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

Ejemplos:

① $f_1(x,y) = x^2 y + y e^{2x}$

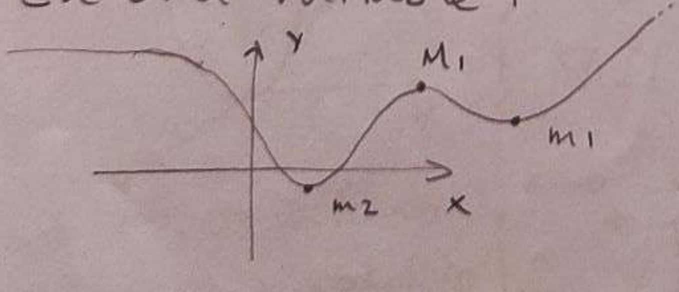
$\nabla f_1 = (2xy + 2ye^{2x}, x^2 + e^{2x})$

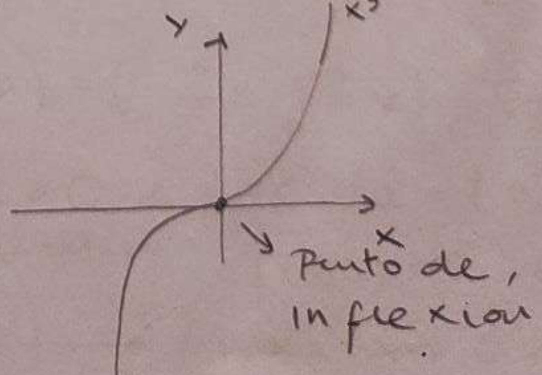
② $f_2(x,y) = (y-x)^2 + x^2 y^2$

$\nabla f_2 = (-2(y-x) + 2xy^2, 2(y-x) + 2yx^2)$

Extremos: máximos, mínimos relativos o absolutos puntos silla.

En una variable:



* Definición: Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Decimos $f$ tiene en $a$ un:

* máximo (mínimo) relativo si $\exists\, B(a;\delta) \subset D$ : $\forall\, v = (x,y)$, $v \in B(a;\delta)$, $f(v) \leq f(a)$ $(f(v) \geq f(a))$

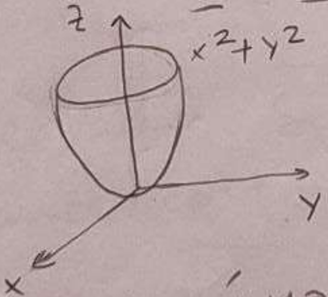
* máximo (mínimo) absoluto si $\forall\, v \in D$ $f(v) \leq f(a)$ $(f(v) \geq f(a))$

Condición necesaria de existencia de extremo relativo: Si $f: D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ tiene extremo relativo y derivadas parciales en $a$ $\Rightarrow$

$$\nabla f(a) = (0,0), \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1: $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f(a) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$ $a = (0,0)$



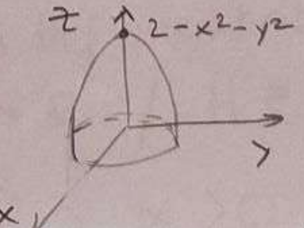

$a = (0,0)$ mínimo relativo y absoluto

$f(0,0) = 0$

Ejemplo 2: $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

$\nabla f(a) = (-2x, -2y)$, $\nabla f(a) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$ $a = (0,0)$




$f(0,0) = 2$ es un máximo absoluto y relativo

M2T
H8

Definición: a es punto crítico de f sisólo si f es diferenciable en a $\nabla f(a)=0$

Observación: a puede ser un punto crítico y no ser ni máximo ni mínimo relativo

Ejemplo: (silla de montar) $f(x,y)=x^2-y^2$

$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)=(0,0) \leftrightarrow a=(0,0)$

pero no es máximo ni mínimo es un punto silla (observar dibujo en "Geogebra 3D online")

$\Rightarrow$ Un punto crítico es candidato a extremo puede ser máximo, mínimo o punto silla.

Clasificación de extremos

⊛ Definición: Matriz Hessiana en dimensión 2. $Hf(a)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

$f_{xx}$ es una notación para $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}$

$f_{yy}$ " " " " $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}$

Observación Si una función tiene derivada segunda continua ($f \in C^2$) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}$

$\Rightarrow$ Proposición: Sea $H_f$, matriz Hessiana de $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $H=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

- Si $\det Hf(a) > 0$ y $\alpha > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en a

M2T
Ha

Si $\det Hf(a) > 0$ y $\alpha < 0$ f tiene un máximo relativo en a.

- Si $\det Hf(a) < 0$ f tiene un punto silla en a
- Si $\det Hf(a) = 0$ el criterio no clasifica.

Ejemplo: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$.

puntos críticos: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x \Rightarrow \nabla f(x,y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x)$

$\Rightarrow (x,y)? / \nabla f(x,y) = 0 \quad \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 3y = 0 \text{ (i)} \\ y^2 - 3x = 0 \text{ (ii)} \end{cases}$ (i) $y = \frac{x^2}{3} \xrightarrow{\text{(ii)}} \frac{x^{\cancel{4}3}}{9} - 3\cancel{x} = 0$

$x^3 - 27 = 0 \quad x^3 = 27 \quad x = 3 \quad y = \frac{x^2}{3} \Rightarrow y = \frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}$

$\Rightarrow a = (3,3)$ punto crítico

$a = (0,0)$ " " (solución trivial)

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$

$\det Hf(3,3) = 18^2 - 81 > 0 \quad$ y $\alpha = 18 > 0$

$\Rightarrow$ f presenta un mínimo relativo en $(3;3)$

M2T
H10

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(0,0) < 0$
$\Rightarrow$ f presenta un punto silla en $(0,0)$