

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Señales y Sistemas  
Juan Cardelino  
juanc@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Litoral Norte  
Sede Paysandú  
Licenciatura en Ingeniería Biológica

Curso 2018

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Definición

- ▶ Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Definición

- ▶ Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:
  - ▶ Lineal
  - ▶ No lineal

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Definición

- ▶ Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:
  - ▶ Lineal
  - ▶ Invariante en el tiempo
  - ▶ No lineal
  - ▶ Variante en el tiempo

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Definición

- ▶ Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:
  - ▶ Lineal
  - ▶ Invariante en el tiempo
  - ▶ No lineal
  - ▶ Variante en el tiempo
- ▶ La clase de sistemas que son simultáneamente lineales e invariantes en el tiempo se denominan

Sistemas lineales invariantes en el tiempo (*SLIT*)

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Definición

- ▶ Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:
  - ▶ Lineal
  - ▶ Invariante en el tiempo
  - ▶ No lineal
  - ▶ Variante en el tiempo
- ▶ La clase de sistemas que son simultáneamente lineales e invariantes en el tiempo se denominan

### Sistemas lineales invariantes en el tiempo (*SLIT*)

- ▶ Los sistemas *SLIT* son muy importantes porque tienen gran cantidad de aplicaciones en el procesamiento de señales.
- ▶ Su utilidad práctica proviene del hecho de que conociendo la respuesta al impulso  $h[n]$ , es posible calcular la respuesta a cualquier entrada  $x[n]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo (discreto)

## Fundamento

- ▶ Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo (discreto)

## Fundamento

- ▶ Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados:
- ▶ Si  $x[n]$  es la entrada a un sistema que realiza la transformación  $T\{\cdot\}$ , la salida es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \right\}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo (discreto)

## Fundamento

- ▶ Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados:
- ▶ Si  $x[n]$  es la entrada a un sistema que realiza la transformación  $T\{\cdot\}$ , la salida es:
- ▶ Si el sistema es **lineal**, por el principio de superposición, la salida se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} \quad (1)$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo (discreto)

## Fundamento

- ▶ Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados:
- ▶ Si  $x[n]$  es la entrada a un sistema que realiza la transformación  $T\{\cdot\}$ , la salida es:
- ▶ Si el sistema es **lineal**, por el principio de superposición, la salida se puede expresar como:
- ▶ Sea secuencia  $h_k[n]$  la respuesta del sistema a la entrada  $\delta[n - k]$ , es decir

$$h_k[n] = T\{\delta[n - k]\}$$

La salida  $y[n]$  es entonces:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} \quad (1)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Fundamento

- ▶ Si el sistema es además **invariante en el tiempo** y la respuesta al impulso es  $h[n]$ , la respuesta a  $\delta[n - k]$  es  $h[n - k]$ , es decir

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad \xRightarrow{\text{sistema invariante}} \quad h[n - k] = T\{\delta[n - k]\}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Fundamento

- ▶ Si el sistema es además **invariante en el tiempo** y la respuesta al impulso es  $h[n]$ , la respuesta a  $\delta[n - k]$  es  $h[n - k]$ , es decir

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad \xRightarrow{\text{sistema invariante}} \quad h[n - k] = T\{\delta[n - k]\}$$

- ▶ y la ecuación 1 queda

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (2)$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Fundamento

- ▶ Si el sistema es además **invariante en el tiempo** y la respuesta al impulso es  $h[n]$ , la respuesta a  $\delta[n - k]$  es  $h[n - k]$ , es decir

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad \xRightarrow{\text{sistema invariante}} \quad h[n - k] = T\{\delta[n - k]\}$$

- ▶ y la ecuación 1 queda

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (2)$$

- ▶ Esta ecuación indica que un sistema lineal invariante en el tiempo está completamente caracterizado por la respuesta al impulso  $h[n]$ .
- ▶ Conociendo la respuesta al impulso  $h[n]$  de un *SLIT*, es posible usar la ecuación 2 para calcular la salida ante cualquier entrada  $x[n]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Fundamento

- ▶ Si el sistema es además **invariante en el tiempo** y la respuesta al impulso es  $h[n]$ , la respuesta a  $\delta[n - k]$  es  $h[n - k]$ , es decir

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad \xRightarrow{\text{sistema invariante}} \quad h[n - k] = T\{\delta[n - k]\}$$

- ▶ y la ecuación 1 queda

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (2)$$

- ▶ Esta ecuación indica que un sistema lineal invariante en el tiempo está completamente caracterizado por la respuesta al impulso  $h[n]$ .
- ▶ Conociendo la respuesta al impulso  $h[n]$  de un *SLIT*, es posible usar la ecuación 2 para calcular la salida ante cualquier entrada  $x[n]$ .
- ▶ La ecuación 2 se llama **convolución**, y se dice que  $y[n]$  es la convolución entre  $x[n]$  y  $h[n]$ . Se representa con la siguiente notación:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Interpretación de la convolución

- ▶ En la descomposición de una secuencia  $x[n]$  en suma de impulsos la muestra en  $n = k$  se representa como la secuencia

$$x_k[n] = x[k]\delta[n - k], \quad -\infty < n < \infty.$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Interpretación de la convolución

- ▶ En la descomposición de una secuencia  $x[n]$  en suma de impulsos la muestra en  $n = k$  se representa como la secuencia

$$x_k[n] = x[k]\delta[n - k], \quad -\infty < n < \infty.$$

- ▶ La derivación de la convolución sugiere que esta secuencia es transformada por el sistema en la secuencia

$$y_k[n] = x[k]h[n - k], \quad -\infty < n < \infty$$

(por linealidad e invarianza temporal del sistema)

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Interpretación de la convolución

- ▶ En la descomposición de una secuencia  $x[n]$  en suma de impulsos la muestra en  $n = k$  se representa como la secuencia

$$x_k[n] = x[k]\delta[n - k], \quad -\infty < n < \infty.$$

- ▶ La derivación de la convolución sugiere que esta secuencia es transformada por el sistema en la secuencia

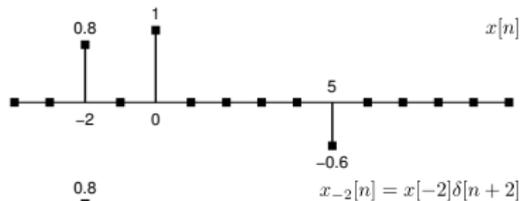
$$y_k[n] = x[k]h[n - k], \quad -\infty < n < \infty$$

(por linealidad e invarianza temporal del sistema)

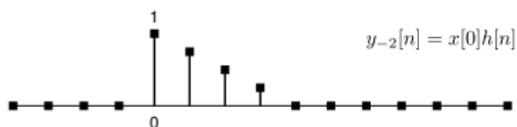
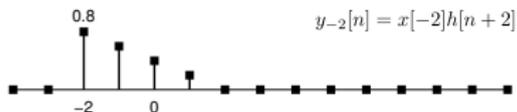
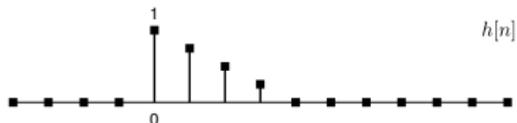
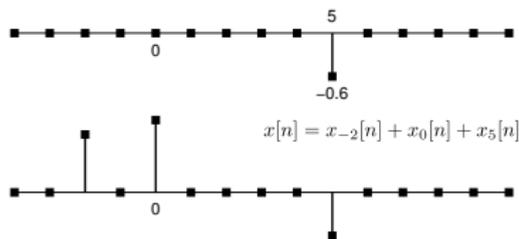
- ▶ Luego, todas las secuencias  $y_k[n]$  para cada  $k$  se suman para obtener la secuencia de salida  $y[n]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

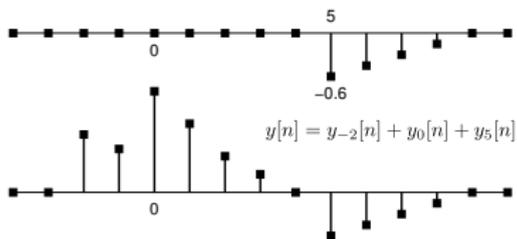
## Interpretación de la convolución



$$x_5[n] = x[5]\delta[n-5]$$



$$y_5[n] = x[5]h[n-5]$$



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ▶ Para eso, se consideran las secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  como función de  $k$ , para  $n$  fijo y  $-\infty < k < \infty$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ▶ Para eso, se consideran las secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  como función de  $k$ , para  $n$  fijo y  $-\infty < k < \infty$ .
- ▶ Estas secuencias se multiplican formando la secuencia  $x[k]h[n-k]$  con variable independiente  $k$  ( $n$  es fijo),

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ▶ Para eso, se consideran las secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  como función de  $k$ , para  $n$  fijo y  $-\infty < k < \infty$ .
- ▶ Estas secuencias se multiplican formando la secuencia  $x[k]h[n-k]$  con variable independiente  $k$  ( $n$  es fijo),
- ▶ y se suman sus muestras en  $-\infty < k < \infty$ . El resultado es el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ▶ Para eso, se consideran las secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  como función de  $k$ , para  $n$  fijo y  $-\infty < k < \infty$ .
- ▶ Estas secuencias se multiplican formando la secuencia  $x[k]h[n-k]$  con variable independiente  $k$  ( $n$  es fijo),
- ▶ y se suman sus muestras en  $-\infty < k < \infty$ . El resultado es el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida.
- ▶ Finalmente, se repite el proceso para  $-\infty < n < \infty$  obteniendo así la secuencia de salida completa.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Se quiere calcular el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ▶ Para eso, se consideran las secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  como función de  $k$ , para  $n$  fijo y  $-\infty < k < \infty$ .
- ▶ Estas secuencias se multiplican formando la secuencia  $x[k]h[n-k]$  con variable independiente  $k$  ( $n$  es fijo),
- ▶ y se suman sus muestras en  $-\infty < k < \infty$ . El resultado es el valor de la muestra  $n$ -ésima de la salida.
- ▶ Finalmente, se repite el proceso para  $-\infty < n < \infty$  obteniendo así la secuencia de salida completa.
- ▶ La única dificultad en el proceso es darse cuenta de como es la secuencia  $h[n-k]$  considerada como función de  $k$  con  $n$  fijo, conociendo  $h[k]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Para ver como es la secuencia  $h[n - k]$  es útil notar que

$$h[n - k] = h[-(k - n)].$$

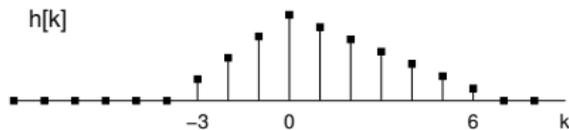
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Para ver como es la secuencia  $h[n - k]$  es útil notar que

$$h[n - k] = h[-(k - n)].$$

- ▶ Dado  $h[k]$



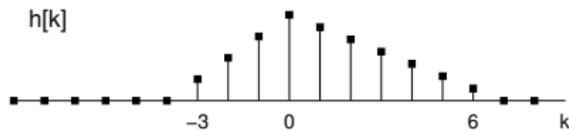
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Para ver como es la secuencia  $h[n - k]$  es útil notar que

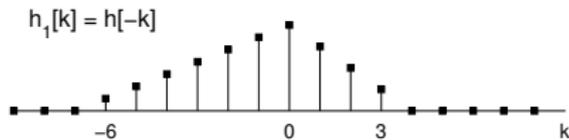
$$h[n - k] = h[-(k - n)].$$

- ▶ Dado  $h[k]$



- ▶ se define  $h_1[k]$  como

$$h_1[k] = h[-k].$$



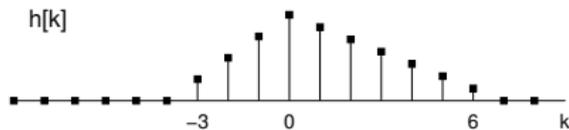
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Para ver como es la secuencia  $h[n - k]$  es útil notar que

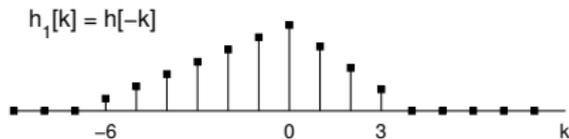
$$h[n - k] = h[-(k - n)].$$

- ▶ Dado  $h[k]$



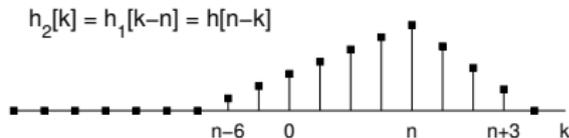
- ▶ se define  $h_1[k]$  como

$$h_1[k] = h[-k].$$



- ▶ Luego, se define  $h_2[k]$  como una versión retardada  $n$  muestras de  $h_1[k]$

$$h_2[k] = h_1[k - n].$$



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Luego de realizar las transformaciones indicadas,  $h_2[k]$  es la secuencia buscada, ya que

$$h_2[k] = h_1[k - n]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Luego de realizar las transformaciones indicadas,  $h_2[k]$  es la secuencia buscada, ya que

$$\begin{aligned}h_2[k] &= h_1[k - n] \\ &= h[-(k - n)]\end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Luego de realizar las transformaciones indicadas,  $h_2[k]$  es la secuencia buscada, ya que

$$\begin{aligned}h_2[k] &= h_1[k - n] \\ &= h[-(k - n)] \\ &= h[n - k]\end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Luego de realizar las transformaciones indicadas,  $h_2[k]$  es la secuencia buscada, ya que

$$\begin{aligned}h_2[k] &= h_1[k - n] \\ &= h[-(k - n)] \\ &= h[n - k]\end{aligned}$$

- ▶ En resumen, para construir  $h[n - k]$  con  $-\infty < k < \infty$ :
  - ▶ Se refleja  $h[k]$  respecto al origen para obtener  $h[-k]$  (operación de inversión temporal).
  - ▶ Se desplaza la secuencia reflejada  $n$  muestras para obtener  $h[n - k]$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Cálculo de la convolución

- ▶ Luego de realizar las transformaciones indicadas,  $h_2[k]$  es la secuencia buscada, ya que

$$\begin{aligned}h_2[k] &= h_1[k - n] \\ &= h[-(k - n)] \\ &= h[n - k]\end{aligned}$$

- ▶ En resumen, para construir  $h[n - k]$  con  $-\infty < k < \infty$ :
  - ▶ Se refleja  $h[k]$  respecto al origen para obtener  $h[-k]$  (operación de inversión temporal).
  - ▶ Se desplaza la secuencia reflejada  $n$  muestras para obtener  $h[n - k]$
- ▶ **Receta para el cálculo de la convolución:** se quiere calcular la convolución entre  $x[n]$  y  $h[n]$ .
  1. Se consideran las secuencias como función de  $k$ .
  2. Para cada  $n$ :
    - a. Se considera  $n$  fijo y se construye la secuencia  $h[n - k]$ .
    - b. Se multiplican las secuencias  $x[k]$  y  $h[n - k]$
    - c. y se suman las muestras para todo  $k$  obteniendo la muestra  $y[n]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo

- ▶ Se consideran las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$ , con

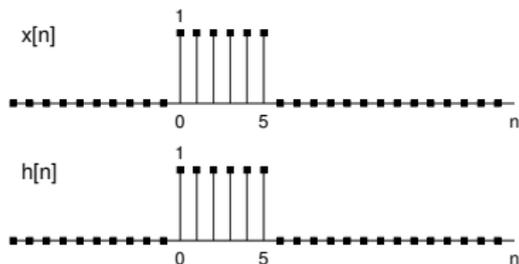
$$x[n] = h[n] = u[n] - u[n - N]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo

- ▶ Se consideran las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$ , con

$$\begin{aligned}x[n] &= h[n] = u[n] - u[n - N] \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}\end{aligned}$$



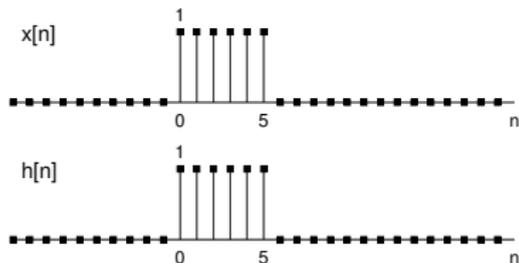
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo

- ▶ Se consideran las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$ , con

$$\begin{aligned}x[n] = h[n] &= u[n] - u[n - N] \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}\end{aligned}$$

- ▶ Se quiere encontrar  $y[n] = x[n] * h[n]$ .
- ▶ En el ejemplo se usa el caso  $N = 6$ .



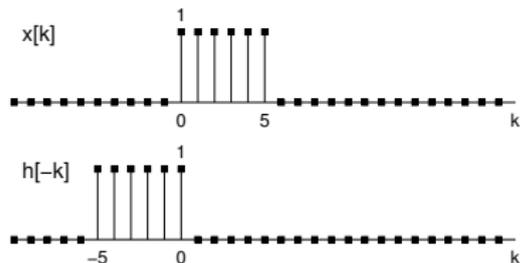
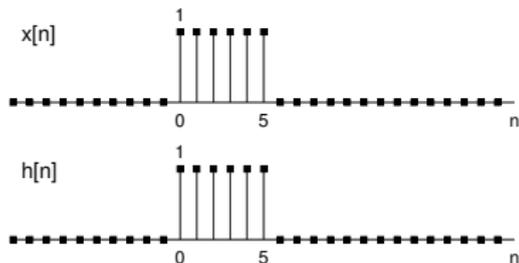
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo

- ▶ Se consideran las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$ , con

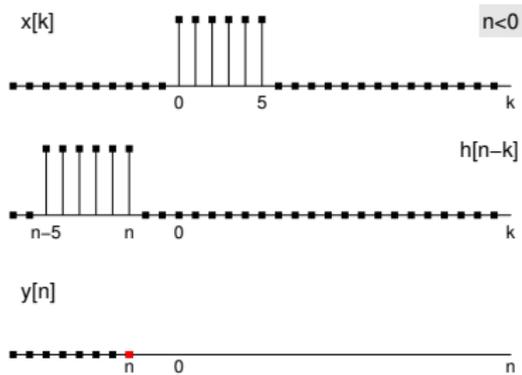
$$\begin{aligned}x[n] = h[n] &= u[n] - u[n - N] \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}\end{aligned}$$

- ▶ Se quiere encontrar  $y[n] = x[n] * h[n]$ .
- ▶ En el ejemplo se usa el caso  $N = 6$ .



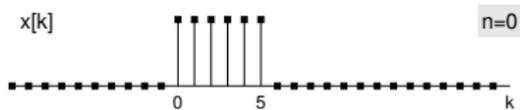
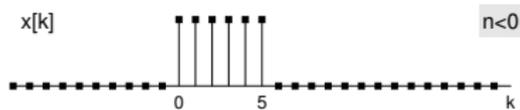
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



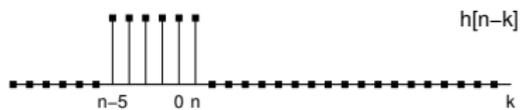
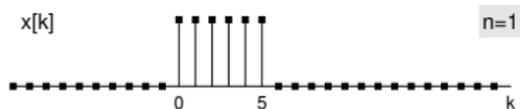
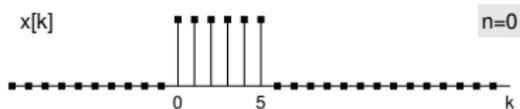
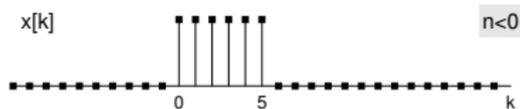
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



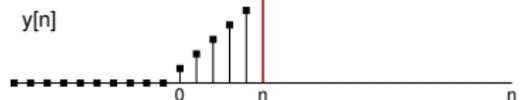
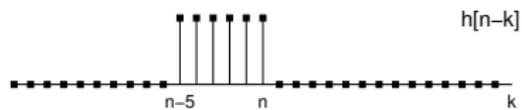
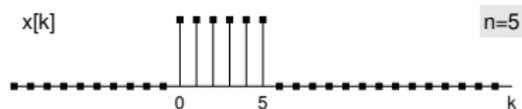
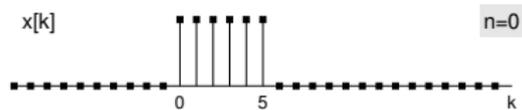
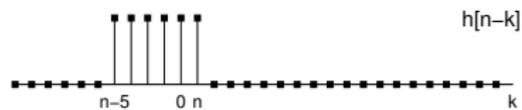
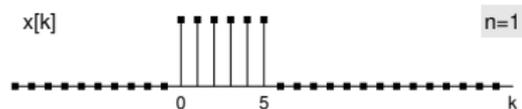
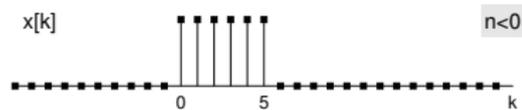
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



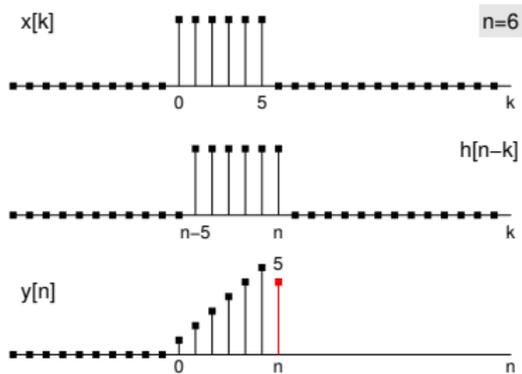
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



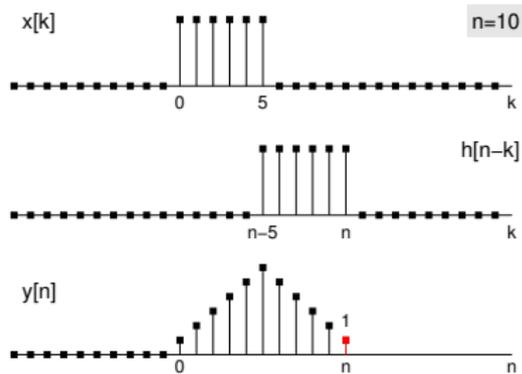
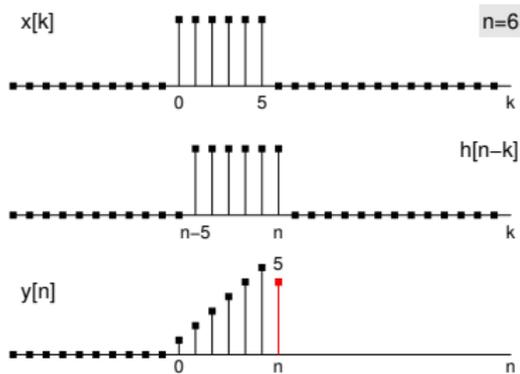
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



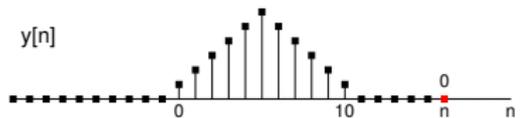
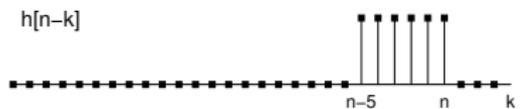
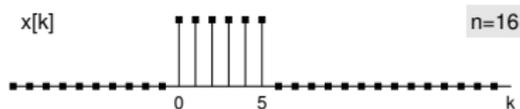
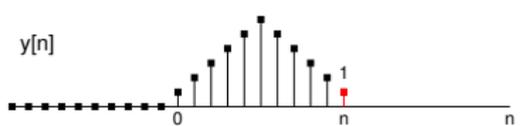
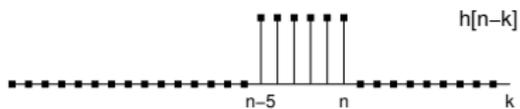
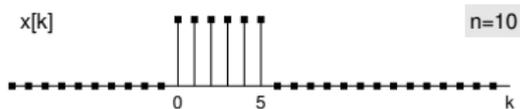
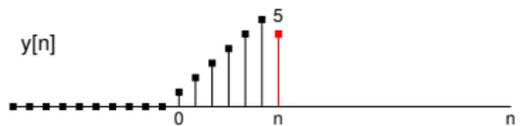
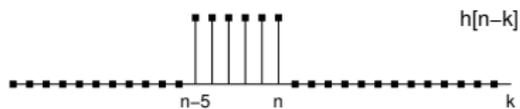
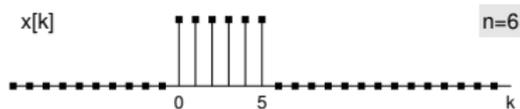
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



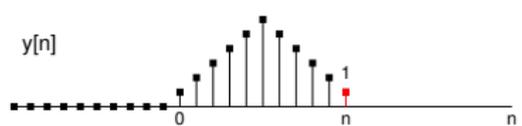
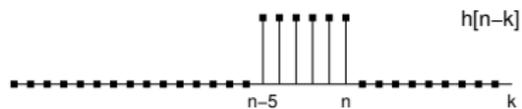
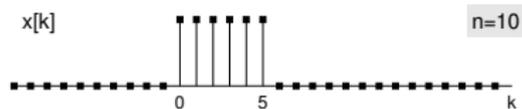
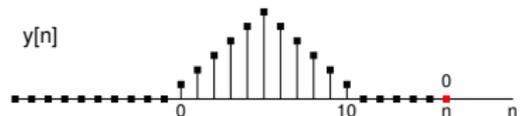
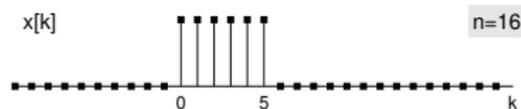
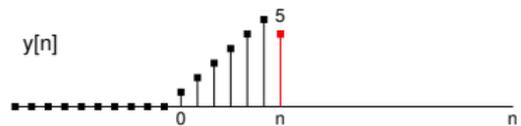
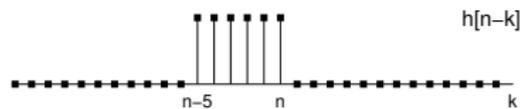
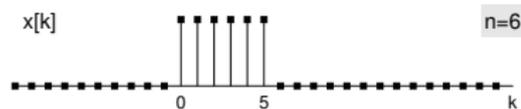
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo



- **Observación:** si las secuencias que se convolucionan tienen soportes de largo  $N_1$  y  $N_2$ , el resultado tiene soporte  $N_1 + N_2 - 1$ .

# Propiedades de los *SLIT*

## Sistemas lineales invariantes en el tiempo y convolución

- ▶ El comportamiento de los sistemas lineales invariantes en el tiempo está descrito por la operación de convolución,

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Sistemas lineales invariantes en el tiempo y convolución

- ▶ El comportamiento de los sistemas lineales invariantes en el tiempo está descrito por la operación de convolución,

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- ▶ Esto implica que las **propiedades de los *SLIT*** están definidas por las **propiedades de la convolución en tiempo discreto**.

# Propiedades de los *SLIT*

## Sistemas lineales invariantes en el tiempo y convolución

- ▶ El comportamiento de los sistemas lineales invariantes en el tiempo está descrito por la operación de convolución,

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- ▶ Esto implica que las **propiedades de los *SLIT*** están definidas por las **propiedades de la convolución en tiempo discreto**.
- ▶ En primer lugar, la ecuación de la convolución indica que un sistema lineal invariante en el tiempo está completamente **caracterizado por su respuesta al impulso  $h[n]$** .

# Propiedades de los *SLIT*

## Secuencia identidad de la convolución: $\delta[n]$

- ▶ La convolución de cualquier secuencia con  $\delta[n]$  resulta en la misma secuencia:

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- ▶ Demostración (informal)

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \stackrel{(1)}{=} x[n]$$
$$(1) \quad \delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

# Propiedades de los *SLIT*

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- ▶ Demostración:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- ▶ Demostración:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$\stackrel{(1)}{=} \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m]$$

(1) Cambio de variable

$$m = n - k$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- ▶ Demostración:

$$\begin{aligned}x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]\end{aligned}$$

(1) Cambio de variable

$$m = n - k$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- ▶ Demostración:

$$\begin{aligned}x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \\ &= h[n] * x[n]\end{aligned}$$

(1) Cambio de variable

$$m = n - k$$

# Propiedades de los SLIT

## Propiedad conmutativa de la convolución

- ▶ La convolución es conmutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- ▶ Demostración:

$$\begin{aligned}x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \\ &= h[n] * x[n]\end{aligned}$$

(1) Cambio de variable

$$m = n - k$$

## Propiedad distributiva de la convolución

- ▶ La convolución es distributiva:

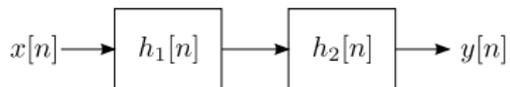
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Demostración:  
ejercicio

# Propiedades de los *SLIT*

## Consecuencia de la propiedad conmutativa

- ▶ Sistemas en cascada:

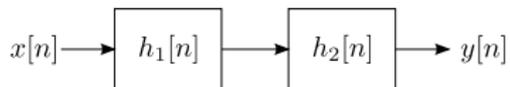


En sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo y la salida del segundo es la salida global.

# Propiedades de los *SLIT*

## Consecuencia de la propiedad conmutativa

- ▶ Sistemas en cascada:



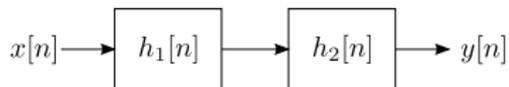
En sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo y la salida del segundo es la salida global.

- ▶ Respuesta al impulso de sistemas en cascada:

# Propiedades de los *SLIT*

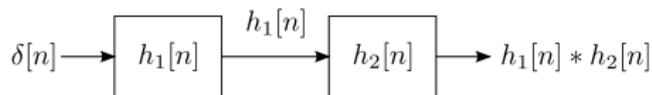
## Consecuencia de la propiedad conmutativa

### ► Sistemas en cascada:



En sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo y la salida del segundo es la salida global.

### ► Respuesta al impulso de sistemas en cascada:

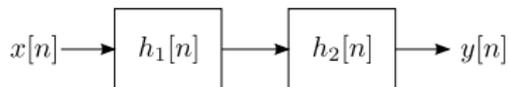


$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

# Propiedades de los *SLIT*

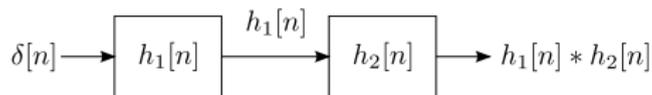
## Consecuencia de la propiedad conmutativa

### ► Sistemas en cascada:



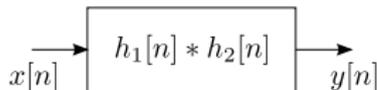
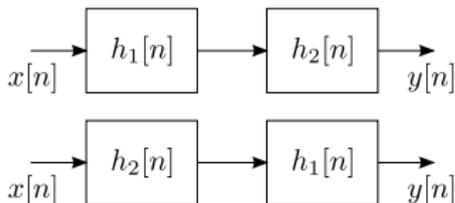
En sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo y la salida del segundo es la salida global.

### ► Respuesta al impulso de sistemas en cascada:



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

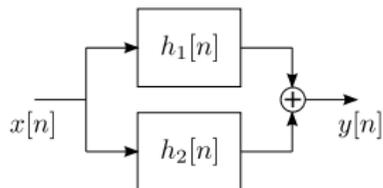
- Como consecuencia de la propiedad conmutativa, la respuesta al impulso del sistema global es independiente del orden de los *SLIT* en la cascada.



# Propiedades de los *SLIT*

## Consecuencia de la propiedad distributiva

- ▶ Sistemas en paralelo:

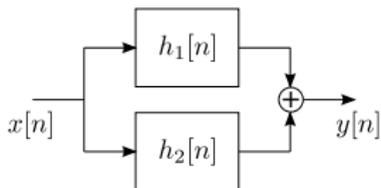


En sistemas conectados en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada y sus salidas se suman para producir la salida global.

# Propiedades de los *SLIT*

## Consecuencia de la propiedad distributiva

- ▶ Sistemas en paralelo:



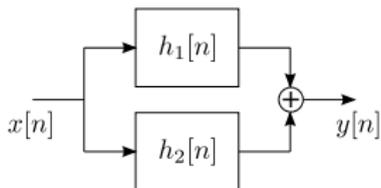
En sistemas conectados en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada y sus salidas se suman para producir la salida global.

- ▶ Respuesta al impulso de sistemas en paralelo:

# Propiedades de los *SLIT*

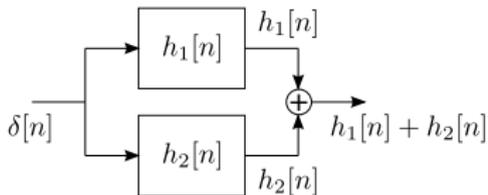
## Consecuencia de la propiedad distributiva

- ▶ Sistemas en paralelo:



En sistemas conectados en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada y sus salidas se suman para producir la salida global.

- ▶ Respuesta al impulso de sistemas en paralelo:

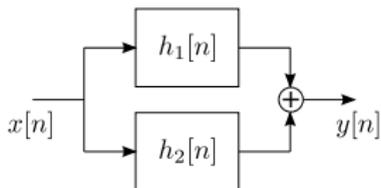


$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

# Propiedades de los *SLIT*

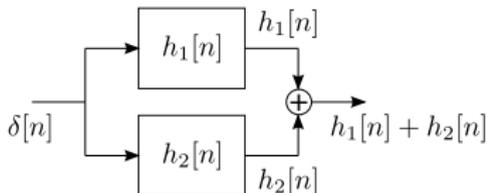
## Consecuencia de la propiedad distributiva

- ▶ Sistemas en paralelo:



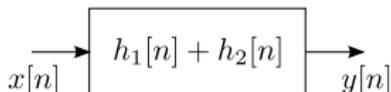
En sistemas conectados en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada y sus salidas se suman para producir la salida global.

- ▶ Respuesta al impulso de sistemas en paralelo:



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

- ▶ Por lo tanto, el sistema equivalente a dos *SLIT* en paralelo es



## Propiedades de los *SLIT*

- ▶ Dos propiedades de los sistemas adicionales a la linealidad y la invarianza temporal son la **estabilidad** y la **causalidad**.
- ▶ Es importante saber cuando un *SLIT* es estable y cuando es causal.

# Propiedades de los *SLIT*

- ▶ Dos propiedades de los sistemas adicionales a la linealidad y la invarianza temporal son la **estabilidad** y la **causalidad**.
- ▶ Es importante saber cuando un *SLIT* es estable y cuando es causal.

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como se vio previamente, un sistema es estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada.

# Propiedades de los *SLIT*

- ▶ Dos propiedades de los sistemas adicionales a la linealidad y la invarianza temporal son la **estabilidad** y la **causalidad**.
- ▶ Es importante saber cuando un *SLIT* es estable y cuando es causal.

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como se vio previamente, un sistema es estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada.
- ▶ **Condición necesaria y suficiente de estabilidad:** un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.

# Propiedades de los *SLIT*

- ▶ Dos propiedades de los sistemas adicionales a la linealidad y la invarianza temporal son la **estabilidad** y la **causalidad**.
- ▶ Es importante saber cuando un *SLIT* es estable y cuando es causal.

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como se vio previamente, un sistema es estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada.
- ▶ **Condición necesaria y suficiente de estabilidad:** un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.
- ▶ Formalmente: sea  $x[n]$  la entrada a un *SLIT* con respuesta al impulso  $h[n]$  y  $y[n]$  la salida correspondiente. Si  $|x[n]| \leq B_x < \infty$  para todo  $n$ , se cumple que,

$$|y[n]| \leq B_y \quad \forall n \quad \iff \quad S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

### Demostración

- ▶ Condición suficiente ( $\Leftarrow$ ): hay que demostrar que si la entrada es acotada y la respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces la salida es acotada,

$$\begin{aligned} \text{si } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{y } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad |y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \forall n$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

### Demostración

- ▶ Condición suficiente ( $\Leftarrow$ ): hay que demostrar que si la entrada es acotada y la respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces la salida es acotada,

$$\text{si } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n$$
$$\text{y } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty \quad \Longrightarrow \quad |y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \forall n$$

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$
$$\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

(1) desigualdad triangular

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \\ &\stackrel{(2)}{\leq} B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \end{aligned}$$

(1) desigualdad triangular

(2)  $x[n]$  acotada,

$$|x[n]| \leq B_x$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \\ &\stackrel{(2)}{\leq} B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\ &= B_x S \end{aligned}$$

(1) desigualdad triangular

(2)  $x[n]$  acotada,

$$|x[n]| \leq B_x$$

# Propiedades de los SLIT

## Estabilidad de los SLIT

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \\ &\stackrel{(2)}{\leq} B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\ &= B_x S \end{aligned}$$

(1) desigualdad triangular

(2)  $x[n]$  acotada,

$$|x[n]| \leq B_x$$

- ▶ Se concluye que

$$|y[n]| \leq B_y = B_x S \leq \infty$$

# Propiedades de los SLIT

## Estabilidad de los SLIT

- ▶ Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \\ &\stackrel{(2)}{\leq} B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\ &= B_x S \end{aligned}$$

(1) desigualdad triangular

(2)  $x[n]$  acotada,

$$|x[n]| \leq B_x$$

- ▶ Se concluye que

$$|y[n]| \leq B_y = B_x S \leq \infty$$

- ▶ Se demostró que si la respuesta al impulso es absolutamente sumable, el sistema es estable.

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Condición necesaria ( $\Rightarrow$ ): hay que demostrar que si la respuesta al impulso no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada:

$$\text{si } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists x[n] \text{ con } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{tal que } |y[n]| = \infty \text{ para algún } n \end{array}$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- Condición necesaria ( $\Rightarrow$ ): hay que demostrar que si la respuesta al impulso no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada:

$$\text{si } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad \Rightarrow \quad \exists x[n] \text{ con } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{tal que } |y[n]| = \infty \text{ para algún } n$$

- Considérese la secuencia de entrada con valores

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Condición necesaria ( $\Rightarrow$ ): hay que demostrar que si la respuesta al impulso no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada:

$$\text{si } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad \Rightarrow \quad \exists x[n] \text{ con } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{tal que } |y[n]| = \infty \text{ para algún } n$$

- ▶ Considérese la secuencia de entrada con valores

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

- ▶ De esta forma,  $x[n]$  es acotada, ya que  $|x[n]| = 0$  o

$$|x[n]| = \frac{|h^*[-n]|}{|h[-n]|} = \frac{|h[-n]|}{|h[-n]|} = 1$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{h^*[k]}{|h[k]|}$$

(2)  $x[n]$  de la ecuación 3

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{h^*[k]}{|h[k]|}$$

(2)  $x[n]$  de la ecuación 3

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|}$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{h^*[k]}{|h[k]|}$$

(2)  $x[n]$  de la ecuación 3

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{h^*[k]}{|h[k]|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$$\stackrel{(3)}{=} \infty$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

(2)  $x[n]$  de la ecuación 3

(3) por hipótesis

# Propiedades de los *SLIT*

## Estabilidad de los *SLIT*

- ▶ Como el sistema es *LIT*, la salida es  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ .
- ▶ Considérese la salida en  $n = 0$  con la entrada dada por la ecuación 3,

$$y[0] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k]$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{h^*[k]}{|h[k]|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$$\stackrel{(3)}{=} \infty$$

(1) salida genérica en  $n = 0$

(2)  $x[n]$  de la ecuación 3

(3) por hipótesis

- ▶ Se concluye que si  $h[n]$  no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada.

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ La clase de los sistemas causales consiste en los sistemas para los cuales la salida  $y[n_0]$  depende solo de las muestras de la entrada  $x[n]$  para  $n \leq n_0$ .

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ La clase de los sistemas causales consiste en los sistemas para los cuales la salida  $y[n_0]$  depende solo de las muestras de la entrada  $x[n]$  para  $n \leq n_0$ .
- ▶ **Condición necesaria y suficiente de causalidad:** un sistema lineal invariante en el tiempo es causal si y solo si la respuesta al impulso cumple que

$$h[n] = 0, \quad n < 0. \quad (4)$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- **Mostración:** por ser un *SLIT*, la muestra  $n$ -ésima de la salida es

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots\end{aligned}$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ **Mostración:** por ser un *SLIT*, la muestra  $n$ -ésima de la salida es

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots\end{aligned}$$

- ▶ Como en la convolución los  $h[k]$  aparecen multiplicados por  $x[n-k]$ , si  $h[k_0] \neq 0$  para algún  $k_0 < 0$ ,  $y[n]$  depende de  $x[n-k_0]$ , con  $n-k_0 > n$

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ **Mostración:** por ser un *SLIT*, la muestra  $n$ -ésima de la salida es

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots\end{aligned}$$

- ▶ Como en la convolución los  $h[k]$  aparecen multiplicados por  $x[n-k]$ , si  $h[k_0] \neq 0$  para algún  $k_0 < 0$ ,  $y[n]$  depende de  $x[n-k_0]$ , con  $n-k_0 > n$
- ▶ lo que significa que la salida depende de muestras futuras de la entrada.

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ **Mostración:** por ser un *SLIT*, la muestra  $n$ -ésima de la salida es

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots\end{aligned}$$

- ▶ Como en la convolución los  $h[k]$  aparecen multiplicados por  $x[n-k]$ , si  $h[k_0] \neq 0$  para algún  $k_0 < 0$ ,  $y[n]$  depende de  $x[n-k_0]$ , con  $n-k_0 > n$
- ▶ lo que significa que la salida depende de muestras futuras de la entrada.
- ▶ Por ejemplo, la muestra  $n = 10$  de la salida es

$$y[10] = \dots + h[-2]x[12] + h[-1]x[11] + h[0]x[10] + h[1]x[9] + \dots$$

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

- ▶ **Mostración:** por ser un *SLIT*, la muestra  $n$ -ésima de la salida es

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots\end{aligned}$$

- ▶ Como en la convolución los  $h[k]$  aparecen multiplicados por  $x[n-k]$ , si  $h[k_0] \neq 0$  para algún  $k_0 < 0$ ,  $y[n]$  depende de  $x[n-k_0]$ , con  $n-k_0 > n$
- ▶ lo que significa que la salida depende de muestras futuras de la entrada.
- ▶ Por ejemplo, la muestra  $n = 10$  de la salida es

$$y[10] = \dots + h[-2]x[12] + h[-1]x[11] + h[0]x[10] + h[1]x[9] + \dots$$

- ▶ Si  $h[n]$  cumple la condición de la ecuación 4, la salida es

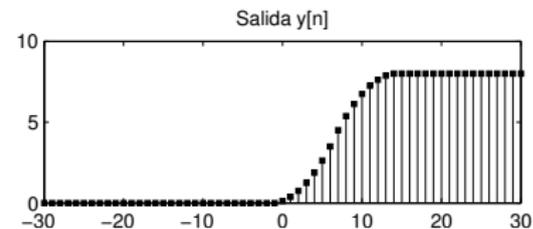
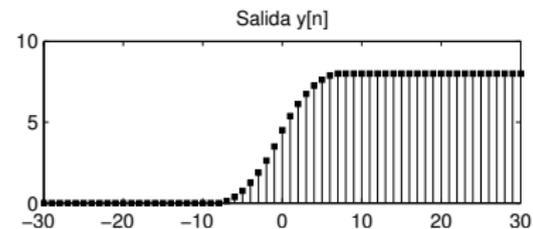
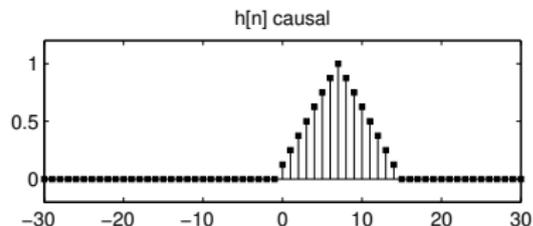
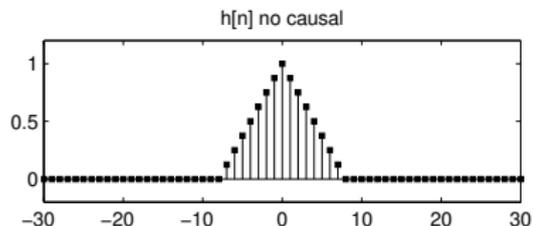
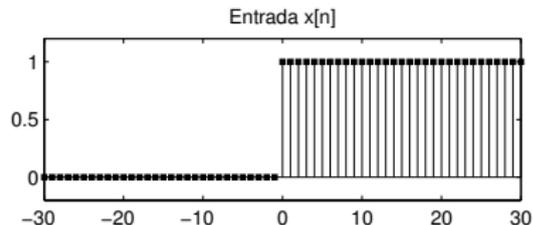
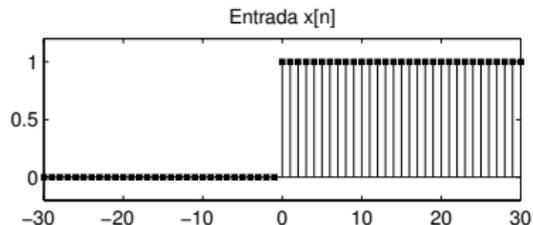
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \dots,$$

y la salida no depende de muestras futuras de la entrada.

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

Ejemplo de sistema no causal y causal



# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

### Observaciones

- ▶ Se llama **secuencia causal** a toda secuencia  $x[n]$  que cumple que  $x[n] = 0$  en  $n < 0$  (porque podría ser la respuesta al impulso de un sistema causal).

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

### Observaciones

- ▶ Se llama **secuencia causal** a toda secuencia  $x[n]$  que cumple que  $x[n] = 0$  en  $n < 0$  (porque podría ser la respuesta al impulso de un sistema causal).
- ▶ Los filtros no causales son **irrealizables** en la práctica. No es posible construir un filtro no causal que opere en tiempo real.

# Propiedades de los *SLIT*

## Causalidad de los *SLIT*

### Observaciones

- ▶ Se llama **secuencia causal** a toda secuencia  $x[n]$  que cumple que  $x[n] = 0$  en  $n < 0$  (porque podría ser la respuesta al impulso de un sistema causal).
- ▶ Los filtros no causales son **irrealizables** en la práctica. No es posible construir un filtro no causal que opere en tiempo real.
- ▶ Cuando se trabaja en una computadora, la señal de entrada y de salida del filtro son secuencias de números almacenadas en memoria. En este caso, la salida puede depender de cualquier muestra de la entrada.

# Propiedades de los *SLIT*

## Resumen

- ▶ Las propiedades de los sistemas lineales invariantes en el tiempo están determinadas por las propiedades de la operación **convolución**.
- ▶ Como consecuencia, quedan **completamente caracterizados por su respuesta al impulso**.
- ▶ **Sistemas en serie**: La respuesta al impulso total de sistemas conectados en serie es la convolución de las respuestas al impulso de cada filtro de la serie.
- ▶ **Sistemas en cascada**: la respuesta al impulso total de sistemas en cascada es la suma de las respuestas al impulso de cada sistema en la cascada.
- ▶ **Estabilidad**: Un *SLIT* es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty.$$

- ▶ **Causalidad**: Un *SLIT* es causal si su respuesta al impulso cumple que

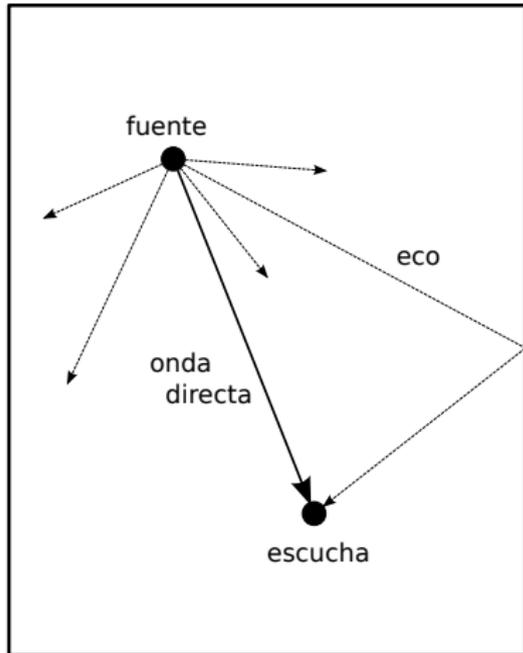
$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$





# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo: reverberación

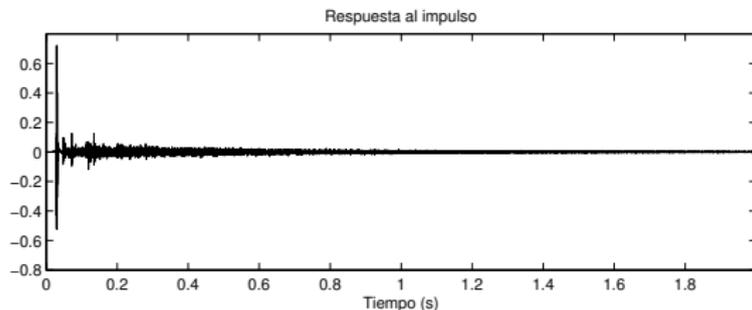


- ▶ Reverberación es lo que le ocurre a un sonido cuando recorre el camino desde la fuente a los oídos de un escucha.
- ▶ La reverberación en un cuarto es el producto de la **superposición de muchos ecos**.
- ▶ Una forma de capturar la respuesta al impulso de una sala es colocando un micrófono en el lugar deseado, generar un impulso sonoro (explosión de un globo o disparo) y grabar todo lo que el micrófono capta.

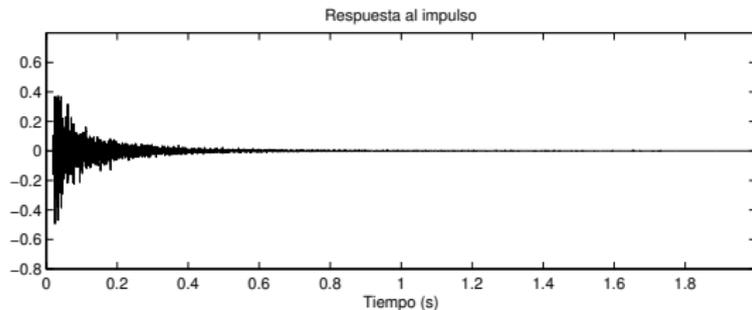
# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplo: reverberación

Gimnasio, Universidad de York (Inglaterra)



Mazmorra en el Palacio Falkland (Escocia)



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

► Previamente se estudiaron los siguientes sistemas:

1. Retardo ideal

3. Cuadrado de la entrada

2. Media móvil

4. Acumulador

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Previamente se estudiaron los siguientes sistemas:
  1. Retardo ideal ✓
  2. Media móvil ✓
  3. Cuadrado de la entrada ×
  4. Acumulador ✓
- ▶ Los sistemas de retardo, media móvil y acumulador son lineales e invariantes en el tiempo, y por lo tanto quedan caracterizados por su respuesta al impulso.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Previamente se estudiaron los siguientes sistemas:
  1. Retardo ideal ✓
  2. Media móvil ✓
  3. Cuadrado de la entrada ×
  4. Acumulador ✓
- ▶ Los sistemas de retardo, media móvil y acumulador son lineales e invariantes en el tiempo, y por lo tanto quedan caracterizados por su respuesta al impulso.
- ▶ La respuesta al impulso puede ser encontrada a partir de la definición de transformación de cada sistema.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Previamente se estudiaron los siguientes sistemas:
  1. Retardo ideal ✓
  2. Media móvil ✓
  3. Cuadrado de la entrada ×
  4. Acumulador ✓
- ▶ Los sistemas de retardo, media móvil y acumulador son lineales e invariantes en el tiempo, y por lo tanto quedan caracterizados por su respuesta al impulso.
- ▶ La respuesta al impulso puede ser encontrada a partir de la definición de transformación de cada sistema.
- ▶ Para eso, basta con observar la respuesta del sistema cuando la entrada es  $x[n] = \delta[n]$ .

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

Retardo ideal

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### Retardo ideal

Ecuación de transformación

$$y[n] = x[n - n_d]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### Retardo ideal

Ecuación de transformación

$$y[n] = x[n - n_d]$$

Respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n - n_d]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Media móvil

Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Media móvil

Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Respuesta la impulso

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Media móvil

Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Respuesta la impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{ \delta[n + M_1] + \delta[n + M_1 - 1] + \cdots + \delta[n] \\ &\quad + \delta[n - 1] + \cdots + \delta[n - M_2] \} \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Media móvil

Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Respuesta la impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{ \delta[n + M_1] + \delta[n + M_1 - 1] + \cdots + \delta[n] \\ &\quad + \delta[n - 1] + \cdots + \delta[n - M_2] \} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

- ▶ Acumulador

Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Acumulador

Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Respuesta al impulso

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Acumulador

Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \\ &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Acumulador

Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \\ &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\ &= u[n] \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Ejemplos

### ► Acumulador

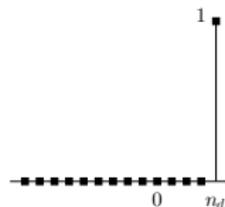
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

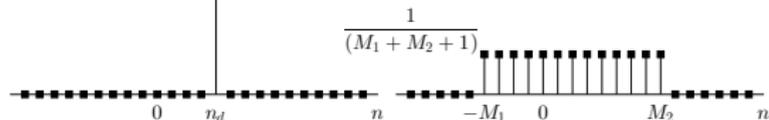
Respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \\ &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\ &= u[n] \end{aligned}$$

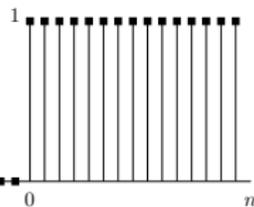
Retardo ideal



Media móvil



Acumulador



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la causalidad

- ▶ A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son **causales**.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la causalidad

- ▶ A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son **causales**.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es nula en muestras negativas,

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la causalidad

- ▶ A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son **causales**.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es nula en muestras negativas,

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

Retardo ideal

Causal si

$$n_d \geq 0$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la causalidad

- ▶ A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son **causales**.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es nula en muestras negativas,

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

Retardo ideal

Causal si

$$n_d \geq 0$$

Media móvil

Causal si

$$-M_1 \geq 0$$

$$M_2 \geq 0$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la causalidad

- ▶ A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son **causales**.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es nula en muestras negativas,

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

Retardo ideal

Causal si

$$n_d \geq 0$$

Media móvil

Causal si

$$-M_1 \geq 0$$

$$M_2 \geq 0$$

Acumulador

Causal

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]|$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]|$$
$$= 1$$

Media móvil

$$S = \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}$$

Estable

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Media móvil

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Media móvil

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]|$$
$$= 1$$

Estable

Media móvil

$$S = \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}$$
$$= 1$$

Estable

Acumulador

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n]$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Media móvil

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Acumulador

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Media móvil

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Acumulador

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

## Análisis de la estabilidad

- ▶ También es posible averiguar si los sistemas son **estables** a partir de la respuesta al impulso.
- ▶ Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5)$$

Retardo ideal

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_d]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Media móvil

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estable

Acumulador

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

Inestable

# Sistemas IIR y FIR

## Análisis de la estabilidad

- ▶ La respuesta al impulso de los sistemas retardo ideal y media móvil tiene un número finito de muestras no nulas.

# Sistemas IIR y FIR

## Análisis de la estabilidad

- ▶ La respuesta al impulso de los sistemas retardo ideal y media móvil tiene un **número finito de muestras no nulas**.
- ▶ El hecho de que la respuesta al impulso sea de **duración finita** hace que la condición de estabilidad siempre se cumpla, ya que la sumatoria de la ecuación 5 tiene un número finito de sumandos.

# Sistemas IIR y FIR

## Análisis de la estabilidad

- ▶ La respuesta al impulso de los sistemas retardo ideal y media móvil tiene un **número finito de muestras no nulas**.
- ▶ El hecho de que la respuesta al impulso sea de **duración finita** hace que la condición de estabilidad siempre se cumpla, ya que la sumatoria de la ecuación 5 tiene un número finito de sumandos.
- ▶ Por otro lado, el sistema acumulador tiene respuesta al impulso de **duración infinita** y es un sistema **inestable**.

# Sistemas IIR y FIR

## Análisis de la estabilidad

- ▶ La respuesta al impulso de los sistemas retardo ideal y media móvil tiene un **número finito de muestras no nulas**.
- ▶ El hecho de que la respuesta al impulso sea de **duración finita** hace que la condición de estabilidad siempre se cumpla, ya que la sumatoria de la ecuación 5 tiene un número finito de sumandos.
- ▶ Por otro lado, el sistema acumulador tiene respuesta al impulso de **duración infinita** y es un sistema **inestable**.

## Clasificación según la duración de la respuesta al impulso

Respuesta al impulso finita  
(*FIR*, Finite impulse response)

- ▶ Siempre son estables.
- ▶ Se implementan mediante la convolución con la respuesta al impulso.

Respuesta al impulso infinita  
(*IIR*, Infinite impulse response)

- ▶ Pueden ser inestables.
- ▶ Se implementan mediante una ecuación en recurrencia.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

# Sistemas IIR y FIR

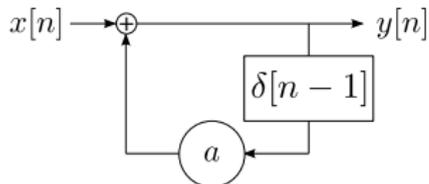
## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



# Sistemas IIR y FIR

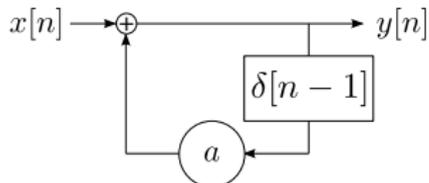
## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- ▶ Para calcular la respuesta al impulso, se establece la entrada en  $x[n] = \delta[n]$ .
- ▶ Además, se impone la condición inicial  $y[-1] = 0$ . Con condiciones iniciales nulas, se dice que el sistema está **inicialmente en reposo**.









# Sistemas IIR y FIR

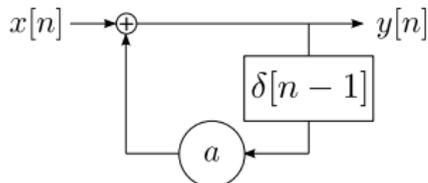
## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- ▶ Para calcular la respuesta al impulso, se establece la entrada en  $x[n] = \delta[n]$ .
- ▶ Además, se impone la condición inicial  $y[-1] = 0$ . Con condiciones iniciales nulas, se dice que el sistema está **inicialmente en reposo**.
- ▶ Resolviendo el sistema recursivamente en  $n \geq 0$  se tiene que,

$$y[0] = ay[-1] + \delta[0] = 1$$

$$y[1] = ay[0] + \delta[1] = a$$

$$y[2] = ay[1] + \delta[2] = a^2$$

$$y[3] = ay[2] + \delta[3] = a^3$$

⋮

$$y[n] = a^n, \quad \text{si } n \geq 0$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1} (y[-1] + \delta[-1]) = 0$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1} (y[-1] + \delta[-1]) = 0$$

$$y[-3] = a^{-1} (y[-2] + \delta[-2]) = 0$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1} (y[-1] + \delta[-1]) = 0$$

$$y[-3] = a^{-1} (y[-2] + \delta[-2]) = 0$$

$$y[-4] = a^{-1} (y[-3] + \delta[-3]) = 0$$

⋮

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1} (y[-1] + \delta[-1]) = 0$$

$$y[-3] = a^{-1} (y[-2] + \delta[-2]) = 0$$

$$y[-4] = a^{-1} (y[-3] + \delta[-3]) = 0$$

⋮

$$y[n] = 0, \quad \text{si } n < 0$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- Para determinar la salida para  $n < 0$ , se despeja  $y[n - 1]$  para expresar la ecuación en recurrencia como,

$$y[n - 1] = a^{-1} (y[n] - x[n])$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1} (y[-1] + \delta[-1]) = 0$$

$$y[-4] = a^{-1} (y[-3] + \delta[-3]) = 0$$

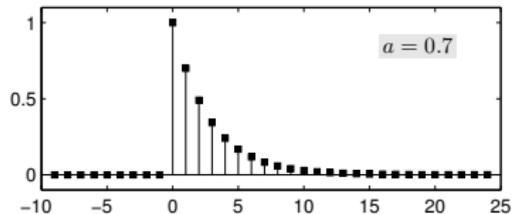
$$y[-3] = a^{-1} (y[-2] + \delta[-2]) = 0$$

⋮

$$y[n] = 0, \quad \text{si } n < 0$$

- Combinando los resultados para  $n \geq 0$  y  $n < 0$ , se obtiene que la respuesta al impulso del sistema es

$$h[n] = u[n]a^n$$



# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- ▶ **Análisis de la estabilidad:** hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- ▶ **Análisis de la estabilidad:** hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] a^k \end{aligned}$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- ▶ **Análisis de la estabilidad:** hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] a^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \end{aligned}$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- ▶ **Análisis de la estabilidad:** hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] a^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \end{aligned}$$

(1) Serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 - r}, & r < 1 \\ \infty, & r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Observación:** el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la **realimentación** de la salida a la entrada.
- ▶ ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- ▶ **Análisis de la estabilidad:** hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] a^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \\ &\stackrel{(1)}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-|a|}, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

### (1) Serie geométrica

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} r^k &= \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} r^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1-r} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & r < 1 \\ \infty, & r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Análisis de la estabilidad:** Si  $|a| < 1$ , la respuesta al impulso es absolutamente sumable y el sistema es estable.
- ▶ **Observación:**
  - ▶ Este es un ejemplo de un sistema con respuesta al impulso de duración infinita que es estable.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- ▶ **Análisis de la estabilidad:** Si  $|a| < 1$ , la respuesta al impulso es absolutamente sumable y el sistema es estable.
- ▶ **Observación:**
  - ▶ Este es un ejemplo de un sistema con respuesta al impulso de duración infinita que es estable.
- ▶ **Análisis de la causalidad:** como se cumple que  $h[n] = 0$  en  $n < 0$ , el sistema es causal.
- ▶ **Observación:**
  - ▶ En realidad, el sistema es causal gracias a la condición de reposo inicial.
  - ▶ Se puede ver que si  $y[-1] \neq 0$ , no se cumple que  $h[n] = 0$  en  $n < 0$  (ejercicio).

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- ▶ El ejemplo anterior es un caso particular de una clase de sistemas definidos a partir de la **ecuación en diferencias**.

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- ▶ El ejemplo anterior es un caso particular de una clase de sistemas definido a partir de la **ecuación en diferencias**.
- ▶ La relación entre la entrada y la salida satisface una ecuación en diferencias de orden  $N$  de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m].$$

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- ▶ El ejemplo anterior es un caso particular de una clase de sistemas definidos a partir de la **ecuación en diferencias**.
- ▶ La relación entre la entrada y la salida satisface una ecuación en diferencias de orden  $N$  de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m].$$

- ▶ Asumiendo que  $a_0 = 1$  (no se pierde generalidad) se tiene que

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M] \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N].$$

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- ▶ El ejemplo anterior es un caso particular de una clase de sistemas definidos a partir de la **ecuación en diferencias**.
- ▶ La relación entre la entrada y la salida satisface una ecuación en diferencias de orden  $N$  de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m].$$

- ▶ Asumiendo que  $a_0 = 1$  (no se pierde generalidad) se tiene que

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M] \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N].$$

- ▶ La muestra actual de la salida se calcula como una combinación lineal de la muestra actual y  $M$  muestras previas de la entrada y  $N$  muestras previas de la salida.

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \cdots + b_Mx[n - M] \\ - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2] - \cdots - a_Ny[n - N].$$

- ▶ Las constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  y  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  son los coeficientes del sistema. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \cdots + b_Mx[n - M] \\ - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2] - \cdots - a_Ny[n - N].$$

- ▶ Las constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  y  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  son los coeficientes del sistema. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.
- ▶ Los valores  $b_i$  se llaman **coeficientes de prealimentación** (feedforward) y los valores  $a_j$  se llaman **coeficientes de realimentación** (backward).

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \cdots + b_Mx[n - M] \\ - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2] - \cdots - a_Ny[n - N].$$

- ▶ Las constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  y  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  son los coeficientes del sistema. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.
- ▶ Los valores  $b_i$  se llaman **coeficientes de prealimentación** (feedforward) y los valores  $a_j$  se llaman **coeficientes de realimentación** (backward).
- ▶ El filtro es recursivo si tiene algún coeficiente de realimentación no nulo. En ese caso, es un filtro IIR.

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \cdots + b_Mx[n - M] \\ - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2] - \cdots - a_Ny[n - N].$$

- ▶ Las constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  y  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  son los coeficientes del sistema. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.
- ▶ Los valores  $b_i$  se llaman **coeficientes de prealimentación** (feedforward) y los valores  $a_j$  se llaman **coeficientes de realimentación** (backward).
- ▶ El filtro es recursivo si tiene algún coeficiente de realimentación no nulo. En ese caso, es un filtro IIR.
- ▶ Si todos los coeficientes de realimentación son nulos, no hay realimentación y el filtro es FIR..

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

### ► Observaciones:

- En general, un sistema definido mediante una ecuación en diferencias tiene respuesta al impulso infinita.
- La respuesta al impulso puede calcularse imponiendo que la entrada es  $x[n] = \delta[n]$  y resolviendo la ecuación recursivamente.
- Es posible calcular la salida **analíticamente** mediante la convolución con la respuesta al impulso,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

- En la práctica, por tratarse de sistemas IIR, no es posible calcular la salida mediante la convolución porque se necesita una cantidad infinita de cuentas para calcular cada muestra de la salida.
- Para calcular la salida en la práctica hay que usar la ecuación en diferencias.

# Sistemas IIR y FIR

## Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

### ► Observaciones:

- Los sistemas FIR siempre pueden representarse mediante una ecuación en diferencias.
  - Los coeficientes de prealimentación coinciden con la respuesta al impulso del sistema,

$$b_k = h[k].$$

- Los coeficientes de realimentación son nulos.

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{i=0}^M h[i]x[n-i] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots + h[M]x[n-M] \\ &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \cdots + b_Mx[n-M]\end{aligned}$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

- ▶ Se considera el sistema con la siguiente ecuación en diferencias,

$$y[n] = x[n] + 0.7x[n - 1] - 0.4x[n - 2]$$

- ▶ Los coeficientes de realimentación son nulos, y por lo tanto, el sistema es FIR (no hay realimentación de la salida en la entrada).
- ▶ Los coeficientes de prealimentación son,

$$b_0 = 1, b_1 = 0.7 \text{ y } b_2 = -0.4.$$

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

- ▶ Se considera el sistema con la siguiente ecuación en diferencias,

$$y[n] = x[n] + 0.7x[n - 1] - 0.4x[n - 2]$$

- ▶ Los coeficientes de realimentación son nulos, y por lo tanto, el sistema es FIR (no hay realimentación de la salida en la entrada).
- ▶ Los coeficientes de prealimentación son,

$$b_0 = 1, b_1 = 0.7 \text{ y } b_2 = -0.4.$$

- ▶ Como la respuesta al impulso coincide con los coeficientes, esta es

$$h[n] = \delta[n] + 0.7\delta[n - 1] - 0.4\delta[n - 2]$$



# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

- ▶ Se considera el sistema con la siguiente ecuación en diferencias,

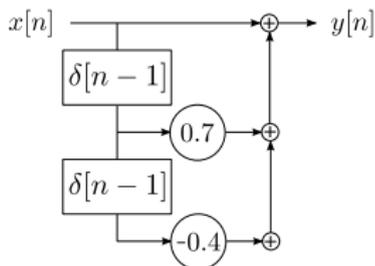
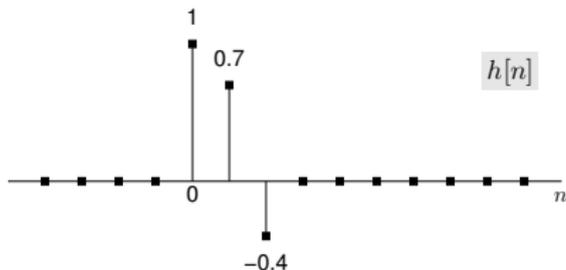
$$y[n] = x[n] + 0.7x[n - 1] - 0.4x[n - 2]$$

- ▶ Los coeficientes de realimentación son nulos, y por lo tanto, el sistema es FIR (no hay realimentación de la salida en la entrada).
- ▶ Los coeficientes de prealimentación son,

$$b_0 = 1, b_1 = 0.7 \text{ y } b_2 = -0.4.$$

- ▶ Como la respuesta al impulso coincide con los coeficientes, esta es

$$h[n] = \delta[n] + 0.7\delta[n - 1] - 0.4\delta[n - 2]$$



# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

### ► Sistema acumulador

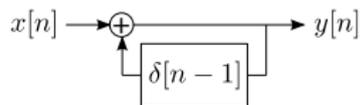
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

### ► Sistema acumulador

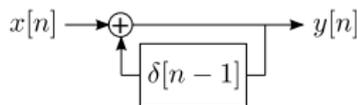
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- Los coeficientes de la ecuación en diferencias son  $b_0 = 1$  y  $a_1 = -1$ .

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

### ► Sistema acumulador

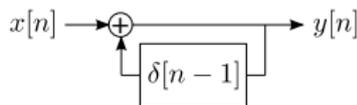
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- Los coeficientes de la ecuación en diferencias son  $b_0 = 1$  y  $a_1 = -1$ .
- Como tiene un coeficiente de realimentación no nulo, la respuesta al impulso es infinita.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

### ► Sistema acumulador

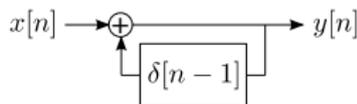
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- Los coeficientes de la ecuación en diferencias son  $b_0 = 1$  y  $a_1 = -1$ .
- Como tiene un coeficiente de realimentación no nulo, la respuesta al impulso es infinita.
- Es un sistema IIR de primer orden con  $|a| = 1$ , y por lo tanto, es inestable.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

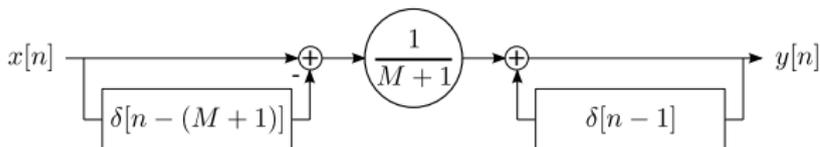
### ► Sistema de media móvil

Ecuación no recursiva

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-k]$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-(M+1)]}{M+1}$$



# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

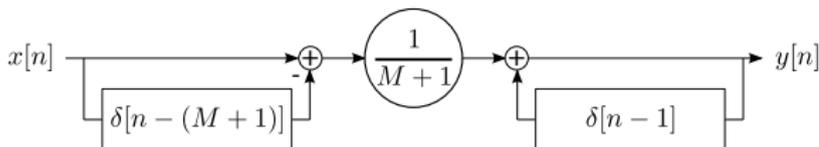
### ► Sistema de media móvil

Ecuación no recursiva

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-k]$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n - (M+1)]}{M+1}$$



- El sistema de media móvil admite mas de una representación en ecuaciones en diferencias, una de forma recursiva y otra de forma no recursiva.

# Sistemas IIR y FIR

## Ejemplos

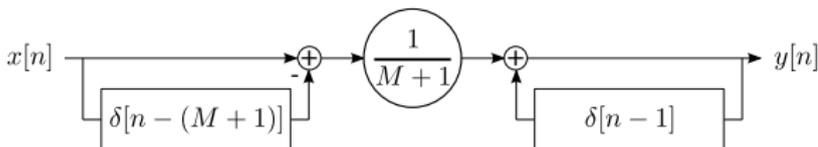
### ► Sistema de media móvil

Ecuación no recursiva

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-k]$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-(M+1)]}{M+1}$$



- El sistema de media móvil admite mas de una representación en ecuaciones en diferencias, una de forma recursiva y otra de forma no recursiva.
- **Atención:** es un ejemplo muy particular de un sistema realimentado que tiene respuesta al impulso finita.

# Referencias I



Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).  
*Discrete-Time Signal Processing*, chapter 2.  
Prentice Hall, 2nd edition.