



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

# Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Programación Lineal, Método Gráfico

Víctor Viana

[victor.viana@noreste.udelar.edu.uy](mailto:victor.viana@noreste.udelar.edu.uy)

14/4/2026

Repaso

Otro ejemplo

Análisis gráfico

Curvas de nivel

Observaciones

- ▶ **Programación Lineal (PL):** técnica matemática utilizada para dar solución a problemas que se plantean muy comúnmente en diversas disciplinas.
- ▶ **Consiste en:** maximizar y/o minimizar una función lineal de dos o más variables teniendo en cuenta que las mismas deben cumplir determinadas exigencias.

- ▶ Una fabrica está dedicada a la elaboración de dos tipos de productos a los que denominaremos tipo A y tipo B.
- ▶ Cada unidad del producto tipo A
  - ▶ necesita 10 unidades de materia prima
  - ▶ y 12 horas de trabajo,
- ▶ mientras cada unidad de los del tipo B
  - ▶ necesita 15 unidades de materia prima
  - ▶ y 16 horas de trabajo.
- ▶ La fabrica dispone semanalmente de 300 unidades de materia prima y 336 horas de trabajo.
- ▶ Los productos del tipo A dan a la empresa una utilidad de \$ 1500 , y los del tipo B una utilidad de \$ 2100.

Suponiendo que todos los productos fabricados se venden y que no existe escasez de otros elementos que intervienen en su elaboración, se desea saber cuántos productos de cada tipo deben elaborarse para que la empresa obtenga máxima ganancia.

Por lo tanto llamaremos:

- ▶ **x** al número de unidades de productos fabricados por semana del tipo A.
- ▶ **y** al número de unidades de productos fabricados por semana del tipo B.

$$f(x,y) = 1500x + 2100y \text{ (ganancia)}$$

- ▶ Si cada producto del tipo A necesita 10 unidades de materia prima y cada producto del tipo B necesita 15 unidades de materia prima deberá cumplirse:

$$10x + 15y \leq 300 \quad (1)$$

- ▶ Por otra parte si cada producto del tipo A insume 12 horas de trabajo para su elaboración y cada producto del tipo B insume 16 horas deberá cumplirse:

$$12x + 16y \leq 336 \quad (2)$$

- ▶ El propio significado físico de las variables impone además que:

$$x \geq 0 \quad (3), \quad y \geq 0 \quad (4)$$

En resumen el modelo matemático adoptado para resolver el ejercicio propuesto consiste en maximizar la función  $f$  tal que

$$f(x,y) = 1500x + 2100y$$

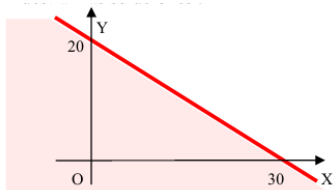
debiendo las variables cumplir con las restricciones:

$$10x + 15y \leq 300$$

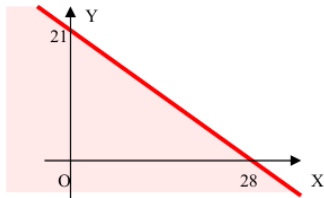
$$12x + 16y \leq 336$$

$$x \geq 0$$

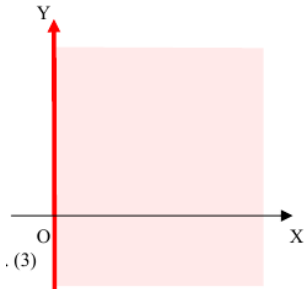
$$y \geq 0$$



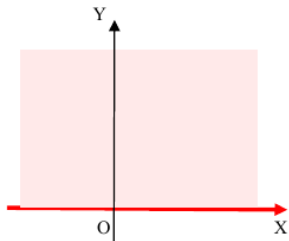
$$10x + 15y \leq 300$$



$$12x + 16y \leq 336$$

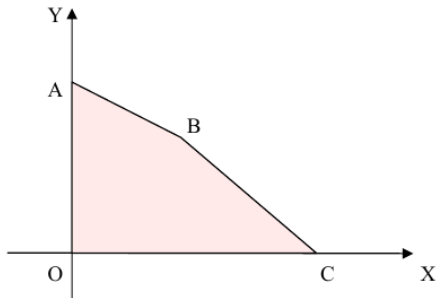


$$x \geq 0$$



$$y \geq 0$$

Región factible: polígono convexo OABC



- ▶ O (0,0)
- ▶ A (0,20)
- ▶ B(12,12)
- ▶ C(28,0)

Si tomamos por ejemplo el punto (5,6) que evidentemente pertenece al recinto, podemos concluir que la empresa puede decidir fabricar 5 productos del tipo A y 6 productos del tipo B a la semana pues sus recursos escasos no se lo impiden.

En ese caso la ganancia que obtendría sería :

$$f(5,6) = 1500 (5) + 2100 (6) = 20100$$

## ¿Que pasa con los vértices?



- ▶  $f(0, 20) = 2100 \times 20 = 42000$
- ▶  $f(28, 0) = 1500 \times 28 = 42000$
- ▶  $f(0, 0) = 0$
- ▶  $f(12, 12) = 2100 \times 12 + 1500 \times 12 = 43200$

- ▶ Para dar solución definitiva al ejercicio haremos uso ahora de las curvas de nivel de la función  $f$ .
- ▶ Llamamos curvas de nivel de una función  $f$  de variables  $x$  e  $y$  a la familia de curvas del plano XOY que cumplen que

$$f(x, y) = K, \text{ con } K \text{ numero real}$$

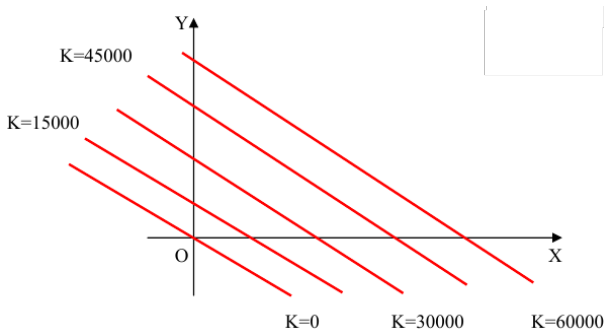
- ▶ En nuestro caso las curvas de nivel de la función  $f$  cumplirán:

$$1500x + 2100y = K,$$

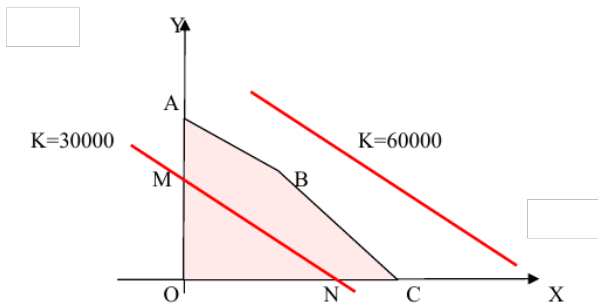
dicho de otra manera:  $y = -1500/2100x + K/2100$

- ▶ Se puede reconocer fácilmente que se trata de una familia de rectas de coeficiente angular
  - ▶  $m = -1500/2100 = -5/7$
  - ▶ y ordenada en el origen  $n = K/2100$
- ▶ Las rectas serán por consiguiente paralelas entre sí.

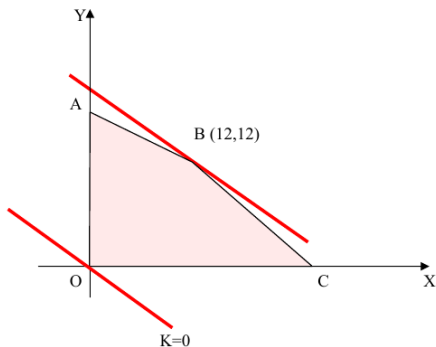
$$y = mx + n$$



**Figura:** Curvas de nivel para diferentes valores de K



**Figura:** Curvas de nivel para diferentes valores de K



**Figura:** Debemos buscar la recta de nivel correspondiente al mayor valor de  $K$  que contenga algún punto de la región factible.



Hemos alcanzado finalmente la solución a nuestro ejercicio: la empresa deberá fabricar 12 productos del tipo A y 12 productos del tipo B y obtendrá por ello una ganancia de:

$$1500 \times (12) + 2100 \times (12) = 43200$$

- ▶ Elegir las incógnitas del problema y hallar la expresión analítica de la función que se pide maximizar y/o minimizar.
- ▶ Expresar en forma de inecuaciones las restricciones a que quedarán sometidas las variables sea por su propio significado como por la escasez de recursos disponibles. Las inecuaciones serán siempre lineales.
- ▶ Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones formado, obteniendo así la región de puntos factibles.



- ▶ Utilizar las rectas de nivel de la función en cuestión para hallar el vértice (o lado) del recinto de puntos factibles donde se produce el máximo y/o mínimo buscado.
- ▶ Usando las coordenadas del punto hallado calcular el valor funcional correspondiente si el problema lo requiere.

- ▶ La resolución gráfica que hemos desarrollado exige especial cuidado a la hora de representar las rectas involucradas en el problema, sean lados de la región factible como curvas de nivel de la función.
- ▶ Cualquier error o falta de precisión en la representación puede provocar un cambio en las pendientes de las rectas y conducir a un vértice equivocado. Muchas veces esas pendientes son muy cercanas y exigen especial atención.

- ▶ El hecho de que la función objetivo se maximizara en un vértice del polígono de puntos factibles no ha sido casual.
- ▶ Es posible demostrar la siguiente proposición: *“El valor máximo y/o mínimo de la función objetivo, en un problema de programación lineal de dos variables, ocurre siempre en uno de los vértices o lado del recinto poligonal convexo de puntos factibles, sea esta región acotada o no acotada”*.
- ▶ Cuando la pendiente de las curvas de nivel de la función coincida con la pendiente de uno de los lados del recinto de puntos factibles la función se maximizará o minimizará en todos los puntos de ese lado.

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértices	Valor funcional
$10x+15y=300$ $12x+16y=336$	(12,12)	Ninguna	B	43200
$10x+15y=300$ $x = 0$	(0, 20)	Ninguna	A	42000
$10x+15y=300$ $y = 0$	(30, 0)	( 2 )	---	-----
$12x+16y=336$ $x = 0$	(0, 21)	( 1 )	---	-----
$12x+16y=336$ $y = 0$	(28, 0)	Ninguna	C	42000
$x = 0$ $y = 0$	(0,0)	Ninguna	O	0

$$\text{máx } 10x_1 + 15x_2 \tag{1}$$

sujeto a

$$4x_1 + 4x_2 \leq 75 \tag{2}$$

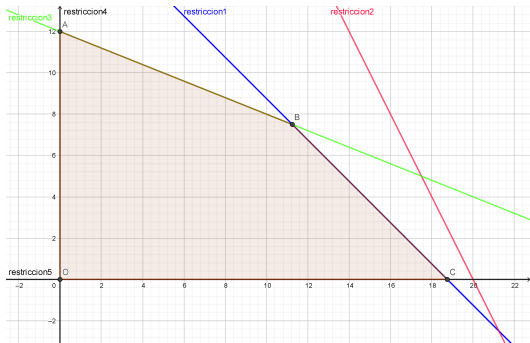
$$4x_1 + 2x_2 \leq 80 \tag{3}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60 \tag{4}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{5}$$



- ▶ O (0, 0)
- ▶ A (0, 12)
- ▶ B (11.25, 7.5)
- ▶ C (18.75, 0)



$x$	$y$	$10x_1 + 15x_2$
0	0	0
0	12	180
11.25	7.5	225
18.75	0	187.5